Position $-15\,\mathrm{cm}$

$r_1 = 5\,\mathrm{cm}; \quad r_2 = d + 5\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm};$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \left|\frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)\right| \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$; (nach unten)

$\Rightarrow \varrho_E = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0} \approx 4{,}1 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3};$

Position $-5\,\mathrm{cm}$

$r_1 = 5\,\mathrm{cm}; \quad r_2 = d - 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm};$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \left|\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)\right| \approx 5{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$; (nach oben)

$\Rightarrow \varrho_E = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3};$

Position $0\,\mathrm{cm}$

$r_1 = 10\,\mathrm{cm}; \quad r_2 = d - 10\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm};$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \left|\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)\right| \approx 4{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$; (nach oben)

$\Rightarrow \varrho_E = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3};$

Position $5\,\mathrm{cm}$

$r_1 = 15\,\mathrm{cm}; \quad r_2 = d - 15\,\mathrm{cm} = 5\,\mathrm{cm};$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \left|\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)\right| \approx 5{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$; (nach oben)

$\Rightarrow \varrho_E = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3};$

Position $15\,\mathrm{cm}$

$r_1 = 25\,\mathrm{cm}; \quad r_2 = 25\,\mathrm{cm} - d = 5\,\mathrm{cm};$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \left|\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2}\right)\right| \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$; (nach unten)

$\Rightarrow \varrho_E = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0} \approx 4{,}1 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3};$

(Benötigte Zeit: 89 min) 18.01.2006

1.2.43 44. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: Massenspektroskop

Bei einem Massenspektroskop werden geladene Teilchen, unter denen sich Teilchen eines bestimmten Typs befinden, deren Massen bestimmt werden sollen, zuerst über ein elektrisches Feld beschleunigt.

Dann treffen die Teilchen auf ein elektromagnetisches Feld. Dabei justiert man die Stärke des elektrischen Felds $\mathcal{E}$ so, dass nur die Teilchen des interessanten Typs den nach dem elektromagnetischem Feld befindlichen Spalt treffen; die uninteressanten Teilchen treffen damit den Spalt nicht und können so nicht in das entscheidende Magnetfeld eintreten.

Die Teilchen, die nicht ausgefiltert wurden, treten nun mit bekannter Geschwindigkeit in das Magnetfeld ein. Die Geschwindigkeit ist deswegen bekannt, weil ja erst durch geeignete Wahl von $\mathcal{E}$ die Teilchen den Spalt treffen konnten. Kennt man $\mathcal{E}$ kennt man damit auch die Teilchengeschwindigkeit: $F_{\mathrm{el}} = F_{\mathrm{L}}; \Rightarrow \mathcal{E}q = \mathcal{B}qv; \Rightarrow v = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\frac{1}{q^2};$

Da das Magnetfeld homogen ist, werden die Teilchen – wie vom Zyklotron her bekannt – einen Halbkreis beschreiben, dessen Radius direkt proportional zur Teilchenmasse ist.

Damit werden die Teilchen je nach Masse an unterschiedlichen Orten auf der Fotoplatte auftreffen; durch Gleichsetzen von F_{L} mit F_{r} und Auflösen nach m erhält man mit der Information über r die gesuchte Teilchenmasse.

Je nach Versuch kann man sich den vorgeschalteten Geschwindigkeitsfilter auch sparen. Wenn man z.B. die Teilchengeschwindigkeit schon kennt und weiß, dass der Teilchenstrom „rein" ist, also nur die Teilchen des interessanten Typs fließen, ist das erneute Bestimmen der Geschwindigkeit unnötig.

(Benötigte Zeit: 46 min) 22.01.2006

1.2.44 45. Hausaufgabe

Exzerpt von B. S. 260f. (sich drehende Leiterschleife)

Wird eine drehbar gelagerte Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω gedreht, so ist die induzierte Spannung u_{ind} nicht konstant, sondern zeitlich veränderlich. Dies wird einsichtig, wenn man die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ betrachet.

u_{ind} ist genau dann maximal, wenn die vom Magnetfeld senkrecht durchsetzte Leiterfläche maximal ist.

u_{ind} beträgt genau dann $0\,\mathrm{V}$, wenn die Leiterfläche parallel (oder antiparallel) zum Magnetfeld steht.

Die Induktionsspannung u_{ind} errechnet sich durch

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{ind}} &= -\dot{\phi} = -\mathcal{B}\dot{A} = -\mathcal{B} \cdot a\dot{b} = \\ &= -\mathcal{B} \cdot a \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b_0 \cos\alpha = -\mathcal{B} \cdot a \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b_0 \cos\omega t = \mathcal{B} \cdot a \cdot b_0 \sin\omega t = \\ &= \mathcal{B}A_0 \cdot \sin\omega t \equiv \hat{u} \cdot \sin\omega t; \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass u_{ind} proportional zur Zeit ist; es handelt sich also nicht um Gleichspannung (wo gelten würde: $\forall t_1, t_2\colon U(t_1) = U(t_2)$), sondern um sinusförmige Wechselspannung. Wechselspannungen sollen mit kleinen Buchstaben geschrieben werden.

(Benötigte Zeit: 24 min) 23.01.2006

1.2.45 46. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde

Betrachtet wurde ein erstaunliches Versuchsergebnis: durch ein Kupferrohr lässt man einen starken Magneten fallen. Dabei wird der Magnet abgebremst, **ohne**, dass er das Rohr berührt! Seine Fallzeit ist also, verglichen mit dem Fall ohne umgebenes Kupferrohr, erheblich größer. Diesen Effekt kann man als „magnetische Reibung" bezeichnen. (Nur leider ist der Ausdruck „Reibung" mit dem Effekt mechanischer Reibung überladen, weswegen die Verwendung des Ausdrucks „magnetische Reibung" zu Verwirrung führen könnte.)

Dies kann unter anderem durch induzierte Wirbelströme erklärt werden, welche geeignete Magnetfelder aufbauen; die Sachlage ist aber noch wesentlich komplizierter.

Äußerst interessant wäre es, wenn man die Wirbelströme sichtbar machen könnte, man also ein Ströme bildgebenes Verfahren zur Verfügung hätte. In der unmittelbaren Nähe wird die Stärke der Wirbelströme am größten sein und mit wachsender Entfernung vom Magneten immer weiter abnehmen.

Ist es mit der Versuchsanordnung möglich, den Magneten dauerhaft vollständig zum Halten zu bringen, einen genügend starken Magneten vorausgesetzt? Ich denke nein, da die Stärke der Wirbelströme und damit die Größe der nach oben gerichteten Kraft von $\dot{\phi}$ abhängt. Bewegt sich nun der Magnet nur sehr langsam oder schwebt er sogar, ist $\dot{\phi}$ Null; also wirkt keine nach oben gerichtete Kraft mehr, weshalb der Magnet wieder zu fallen beginnt.

Dieses Spielchen kann sich zwar lange fortsetzen, wird aber nie zu einem vollständigen, permanenten Schweben des Magneten führen. Richtig?

(Benötigte Zeit: 37 min) 24.01.2006

1.2.46 47. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: Schnurmodell zum elektromagnetischen Schwingkreis

Das Konzept des Schnurmodells hatten wir uns ja bereits als Analogon zu elektrischen Stromkreisen behandelt. Nun wollen wir auf die Unterscheidung zwischen elastischen und trägen Elementen eingehen.

Elastische Elemente können Energie speichern, sie sind Energiespeicher. Im Elektrischen ist ein Kondensator solch ein elastisches Element; seine Energie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2$ $\left[1 \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}\mathrm{C}^2 = 1\,\mathrm{J}\right]$.

Im Mechanischen ist eine an die Schnur geheftete Gummimembran (oder auch eine Feder), versteckt in einer Blackbox, ein elastisches Element. Dort errechnet sich die Energie zu $E = \frac{1}{2}Dx^2$ $\left[1 \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{J}\right]$.

Verbindet man im Elektrischen einen Kondensator leitend mit einer Spannungsquelle, fließt kurzzeitig ein Strom – so lange, bis – im Mechanischen – die Maximalauslenkung der Gummimembran erreicht ist. Auf der einen Seite fließen (z.B.) negative Ladungen in den Kondensator hinein, auf der anderen fließen sie wieder heraus (obwohl keine Ladungsträger zwischen den Kondensatorplatten selbst fließen; vgl. Verschiebungsstrom): die Zahl der positiven Ladungen auf der rechten Seite hat sich verringert.

Auch im Mechanischen „verschwindet" Schnur auf der einen Seite und „taucht" auf der anderen Seite wieder auf – die Analogie trägt.

Träge Elemente sind ebenfalls Energiespeicher. Im Mechanischen ist ein Schwungrad solch ein Element; seine Energie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}m_{\mathrm{eff}}v^2$ $\left[1 \cdot \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{J}\right]$. Ein Schwungrad gilt deswegen als träges Element, weil es träge ist – man benötigt Energie, um ein stillstehendes Schwungrad in Bewegung zu versetzen, und man benötigt ebenfalls Energie, um ein sich drehendes Schwungrad wieder abzubremsen; allgemein: man benötigt Energie, um den Bewegungszustand zu ändern.

Die Kraft, die man aufbringen muss, um das Rad zu beschleunigen oder abzubremsen, berechnet sich nach der bekannten Formel $F = m_{\text{eff}}\dot{v} = m_{\text{eff}}a \left[1\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\,\text{N}\right]$. Dabei beschreibt $\dot{v}$ gerade die Änderung des Bewegungszustands.

Im Elektrischen entspricht dem Schwungrad eine Spule der Induktivität L. Die Spulenenergie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}LI^2 \left[1 \cdot \frac{\text{V}\cdot\text{s}^2}{\text{C}}\frac{\text{C}^2}{\text{s}^2} = 1\,\text{J}\right]$. Eine Spule gilt deswegen als träges Element, weil sie träge ist – man benötigt Energie, um die Stärke des durch sie hindurchfließenden Stroms I zu ändern.

Die Spannung, die überwunden werden muss, um I zu ändern, errechnet sich zu $U = L\dot{I} \left[1\,\frac{\text{V}\cdot\text{s}^2}{\text{C}}\frac{\text{C}}{\text{s}^2} = 1\,\text{V}\right]$. Dabei beschreibt $\dot{I}$ gerade die Änderung der Stromstärke.

Kombiniert man ein träges Element mit einem elastischen, so erhält man einen Schwingkreis. Einmal angestoßen, erhält man (unter Vernachlässigung der Reibung) eine andauernde Schwingung: im Mechanischen fließt die Schnur (z.B.) zuerst nach rechts, bewegt sich dann gar nicht, fließt nach links, bewegt sich wieder nicht, usw.

Diese Schwingung erfolgt mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Bei der Aufstellung der den Schwingkreis beschreibenden Gleichungen muss der Energieerhaltungssatz bzw. die Gegengleichheit von Kraft und Gegenkraft beachtet werden:

$Dx + m_{\text{eff}}a = 0$

$Dx + m_{\text{eff}}\ddot{x} = 0$

D und m_{eff} sind positiv; also muss entweder x oder $\ddot{x} = \dot{v} = a$ negativ sein, um die Gleichung zu erfüllen.

Stellt man die Gleichung fürs Elektrische auf, so muss man wieder die Gegengleichheit beachten. Allerdings fällt dies im Elektrischen wesentlich mehr auf, als im Mechanischen: im Mechanischen ist man der Gegengleichheit von Kraft und Gegenkraft bewusst, und die unterschiedlichen Vorzeichen verstehen sich von selbst.

Im Elektrischen dagegen ist man diesen – eigentlich grundlegenden – Sachverhalt nicht gewohnt. Die zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge sind aber dieselben.

Das Pendant zur Kraft im Mechanischen ist im Elektrischen die Spannung, also lautet die Gleichung:

$\frac{1}{C}Q + L\dot{I} = 0$

$\frac{1}{C}Q + L\ddot{Q} = 0$

Auch hier muss entweder Q oder $\ddot{Q} = \dot{I}$ negativ sein. Auffallend ist die große Symmetrie in der Differentialgleichung:

$k_1x + k_2\ddot{x} = 0,$

wobei k_1 und k_2 Konstanten sind und x das jeweilige Pendant zur Ladung beschreibt.

Löst man diese Gleichung auf (mit $\dot{x} = \hat{\dot{x}} \sin \omega t$), erhält man die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung:

$k_1 - k_2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$

Setzt man wieder die ursprünglichen Bezeichner für k_1 und k_2 ein, erhält man:

$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ beim elektromagnetischen Schwingkreis und

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ im Mechanischen

Übertragung von B. S. 275 aufs mechanische Modell

Die Schwingungen in einem elektrischen Schwingkreis lassen sich mit den Schwingungen im Schnurmodell vergleichen. Dargestellt sind die Verhältnisse für die ungedämpfte Schwingung:

a) Die Gummimembran ist maximal ausgelenkt, die Zugkraft ist $\hat{F}$. Die Schnur bewegt sich nicht. In der Blackbox ist die Federenergie $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}\frac{1}{D}\hat{F}^2$ gespeichert.

(Die Größe $\frac{1}{D}$ ist ein Maß für die Weichheit/Nachgiebigkeit der Feder. Sie entspricht der Kapazität im Elektrischen. (vgl. auch $\frac{1}{v}\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$ („Langsamkeit“)))

b) Die Gummimembran entspannt sich mit zunehmender Schnurgeschwindigkeit [in die andere Richtung]. Die Bewegungsenergie des Rads wächst in gleichem Maße, wie die Federenergie der Gummimembran abnimmt: $E_{\text{Feder}} + E_{\text{Rad}}$ ist konstant.

c) Die Gummimembran ist vollständig entspannt und besitzt keine Federenergie mehr. Die Schnurgeschwindigkeit hat ihre größten Wert $\hat{v}$ erreicht. Die Energie des Rads beträgt nun $E_{\text{Rad}} = \frac{1}{2}m_{\text{eff}}v^2$.

d) Die Trägheit des Schwungrads bewirkt das Weiterfließen der Schnur über den entspannten Zustand hinaus. Die Schnurgeschwindigkeit und die Radenergie nehmen ab. Die Gummimembran spannt sich in entgegengesetzter Richtung und gewinnt wieder Federenergie.

e) Die Gummimembran ist vollständig entgegengesetzt ausgelenkt. Die Schnur bewegt sich nicht.

Die Vorgänge wiederholen sich nun in umgekehrter Richtung.

(Benötigte Zeit: 119 min) 25.01.2006

1.2.47 48. Hausaufgabe

Auflösung der Differentialgleichung fürs Mechanische

$Dx + m_{\text{eff}}\ddot{x} = 0;$

Ableiten nach der Zeit bringt:

$D\dot{x} + m_{\text{eff}}\dddot{x} = 0;$

Da die SinusFunktion nach zweimaligem Ableiten wieder zum Sinus führt (nur mit umgekehrten Vorzeichen), vermuten wir:

$\dot{x} = \hat{\dot{x}} \cdot \sin \omega t;$

Ableiten bestätigt unsere Vermutung:

$\ddot{x} = \hat{\dot{x}}\omega \cdot \cos \omega t;$

$\dddot{x} = -\hat{\dot{x}}\omega^2 \cdot \sin \omega t;$

Einsetzen bringt dann:

$D\hat{\dot{x}} \cdot \sin \omega t - m_{\text{eff}}\hat{\dot{x}}\omega^2 \cdot \sin \omega t = 0;$

Kürzen von $\hat{\dot{x}}$ und $\sin \omega t$ führt zu:

$D - m_{\text{eff}}\omega^2 = 0;$

Das Kürzen ist deswegen zulässig, weil keine Lösungen verloren gehen, wenn $\hat{\dot{x}}$ oder $\sin \omega t$ 0 sind: in diesen Fällen ist die Gleichung immer erfüllt.

ω errechnet sich damit zu

$|\omega| = \sqrt{\frac{D}{m_{\text{eff}}}};$

Nimmt man für m_{eff} die Spuleninduktivität L und statt D $\frac{1}{C}$ erhält man die bekannte Gleichung für den elektromagnetischen Schwingkreis; unsere Herleitung ist also korrekt.

(Benötigte Zeit: 17 min) 29.01.2006

1.2.48 49. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: Differentialgleichungen

Differentialgleichungen unterscheiden sich von „normalen“ Gleichungen darin, dass man nicht nach bestimmten Zahlen, sondern nach bestimmten Funktionen sucht, welche eine Gleichung erfüllen. Beispiel:

$\mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}''(x) = 0;$

Eine Funktion, die diese Gleichung erfüllt, ist f mit $\mathrm{f}(x) = 0$. Oftmals spart man sich das Ausschreiben des Parameters:

$\mathrm{f}' + \mathrm{f}'' = 0;$

$\dot{\mathrm{f}} + \ddot{\mathrm{f}} = 0;$

Differentialgleichung sind im Allgemeinen nur sehr schwer analytisch lösbar; oft kann man auch nur Näherungslösungen angeben. Dabei ist es sehr leicht, schwer zu lösende Differentialgleichungen zu konstruieren:

$\mathrm{f}^{(n)}(x) + \ln_{\mathrm{f}'(\mathrm{f}''(x)+1)} \mathrm{f}(x) + \int_{\mathrm{f}''(42)}^{\mathrm{f}'(23)} \mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x + 1 = 0$ mit $n = \int_0^1 \mathrm{f}(\mathrm{f}'(\mathrm{f}''(\cdots(x)\cdots)))\,\mathrm{d}x;$

Nicht analytisch lösbare Gleichungen bezeichnet man als „nicht integrabel“.

	Bekannte Gleichungen	Differentialgleichungen
Definitionsmenge	Menge von Zahlen, z.B. $\mathbb{R}_0^+$	Menge von Funktionen von einer Menge von Zahlen nach einer Menge von Zahlen, z.B. $\{\mathrm{f} \mid D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \wedge W_\mathrm{f} = \mathbb{R}_0^+\}$
Lösungsmenge	Irgendeine Teilmenge der Definitionsmenge	Irgendeine Teilmenge der Definitionsmenge
Oft genutzte Operationen	$+, \cdot, \ldots$	Differenzieren, Integrieren, ...

Differentialgleichungen spielen in der Physik eine wichtige Rolle, da man mit ihnen viele dynamischen Vorgänge beschreiben kann. Beispielsweise ist das Induktionsgesetz,

$|U_\mathrm{ind}| = n\left|\dot{\phi}\right|$,

auch eine Differentialgleichung:

$|U_\mathrm{ind}| = n\,|\phi'(t)|$;

Fragen:

- Differentialgleichungen handeln zwar von Funktionen, aber immer noch von Funktionen von Zahlen zu Zahlen. Hat man den Begriff „Differentialgleichung" auf allgemeine Funktionen von einer Menge A nach einer Menge B erweitert?
- Kann man überhaupt auch auf anderen Mengen als den reellen Zahlen differenzieren?

  (Auf den natürlichen Zahlen zu differenzieren ist möglich (!), allerdings konnte ich das nicht nachvollziehen.)
- Kann man auf Mengen, die nicht aus Zahlen bestehen, differenzieren?
- Man kann Funktionen ja einmal, zweimal, dreimal etc. differenzieren. Dies scheint mir eine Beschränkung zu sein – kann man also evtl. Funktionen auch „eineinhalb" Mal differenzieren?

(Wenn überhaupt wird dann vermutlich der Begriff der „eineinhalb Mal differenzierten Funktion" nicht mehr viel mit der ursprünglichen Definition der Differenzierung zu tun haben – aber die Fakultätsfunktionen (z.B.) hat man auch sinnvoll erweitern können, auch, wenn dann die ursprüngliche Definition ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$) nicht mehr in der erweiterten Definition erkannbar ist. (Und die Potenzierung hat man auch von einer simplen Kurzschreibweise der Multiplikation ($a^b = \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n\ \mathrm{Mal}}$) erweitern können ($a^b$ mit $b \in \mathbb{R}$ oder sogar $b \in \mathbb{C}$).) Eine Erweiterung der Differenzierung scheint mir daher sinnvoll.)

(Benötigte Zeit: 67 min) 31.01.2006

1.2.49 51. Hausaufgabe

Buch Seite 277, Aufgabe 1

Ein Kondensator mit $C = 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$ und eine Spule mit $L = 44\,\mathrm{mH}$ bilden einen Schwingkreis. Berechnen Sie die Eigenfrequenz. Durch Einschieben eines Eisenkerns in die Spule vergrößert sich deren Induktivität um den Faktor 23. Wie verändert sich dadurch die Eigenfrequenz?

$f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 2{,}4\,\mathrm{kHz}$;

$f' = \frac{1}{\sqrt{23}} f \approx 0{,}5\,\mathrm{kHz}$;

Buch Seite 277, Aufgabe 2

Eine lange Spule ($n = 340$, $l = 60\,\mathrm{cm}$, $d = 8\,\mathrm{cm}$) wird mit einem Kondensator der Kapazität $C = 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$ und einem Widerstand $R = 200\,\Omega$ in Serie geschaltet. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz.

$U_C + U_R + U_L = 0$;

$\frac{1}{C}Q + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0$;

$Q = Q_0 \sin\omega t$;

$\frac{1}{2}Q_0 \sin\omega t + RQ_0\cos\omega t - LQ_0\omega^2\sin\omega t = 0$;

$\sin\omega t \cdot \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) + \cos\omega t \cdot R\omega = 0$;

$\tan\omega t \cdot \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) = -R\omega$;

$\tan\omega t = -\frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}$;

Frage: Wie weiter?

Buch Seite 277, Aufgabe 3

Ein Schwingkreis mit einer Kapazität von $C = 47\,\mathrm{nF}$ schwingt bei einer Frequenz von $f = 3{,}7\,\mathrm{kHz}$. Wie groß ist die Induktivität?

$f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}; \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2}\frac{1}{C} \approx 0{,}039\,\mathrm{H}$;

(Benötigte Zeit: 67 min) 01.02.2006

1.2.50 52. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms, Wechselstromwiderstand von Spule und Kondensator

Gleichstrom kann als Spezialfall des Wechselstroms angesehen werden, nämlich als ein Wechselstrom mit der Winkelgeschwindigkeit und Frequenz Null. Die jeweiligen Formeln für Wechselstrom ergeben dann die schon bekannten Formeln für Gleichstrom.

Dass Gleichstrom ein Spezialfall sein muss ist auf den ersten Blick vielleicht nicht klar erkennbar, leuchtet jedoch nach genauerer Betrachtung ein: Ein Wechselstrom sehr niedriger Frequenz – sagen wir $0{,}01\,\mathrm{Hz}$ – ändert seine Stromstärke nur äußerst langsam; plottet man $I(t)$, so erhält man eine „fast waagrechte" Kurve.

Regelt man die Frequenz noch weiter herunter, wird die Kurve immer flacher. Nimmt man schließlich Gleich-statt Wechselstrom, so ist die Kurve waagrecht. Der Unterschied der Kurve mit der Steigung Null (Gleichstrom) und der mit einer sehr geringen Steigung (Wechselstrom sehr niedriger Frequenz) ist jedoch sehr gering.

Damit liegt der Schluss nahe, dass auch die physikalischen Auswirkungen von Gleichstrom und Wechselstrom sehr niedriger Frequenz fast identisch sind. Er wäre nun wünschenswert, dies auch in Formeln auszudrücken.

Als Beispiel dient die ideale Spule, also eine Spule ohne OHMschen Widerstand. Offensichtlich ist ihr Widerstand bei Gleichstrom –

$\omega = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ – gleich $0\,\Omega$. Da aber jede Stromstärkeänderung $\dot{I}$ – also Wechselstrom – eine Gegenspannung induziert (Stichwort Selbstinduktion), nimmt der Widerstand mit steigender Wechselstromfrequenz zu; sein Wert errechnet sich mit $R_L(\omega) = \omega L$.

Setzt man nun für ω $0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ ein – wendet man also die Formel auf Gleichstrom an – so erhält man – wie auch erwünscht – $R_L(0\,\frac{1}{\mathrm{s}}) = 0\,\Omega$.

Fürs bessere Verständnis ist es hilfreich, sich das mechanische Analogon der Spule vorzustellen: Ein Schwungrad ist bei Gleichstrom offensichtlich ein idealer Leiter. Wechselt hingegen die Bewegungsrichtung der Schnur, so wirkt das Rad wegen seiner Trägheit der Bewegung entgegen: Das Rad wechselt seine Drehrichtung nicht sprunghaft, sondern es wird erst abgebremst und beschleunigt dann in die andere Richtung.

Es ist auch möglich, für den Widerstand eines Kondensators solch eine Formel aufzustellen. Bei Gleichstrom ist ein Kondensator offensichtlich ein Nichtleiter, der Widerstand geht also gegen $\infty\,\Omega$. Bei Wechselstrom jedoch fließt durchaus Strom; im entarteten Fall spricht man vom Auflade-bzw. Entladestrom. Mit steigender Wechselstromfrequenz nimmt der Widerstand ab.

Die Höhe des Widerstands errechnet sich zu $R_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}$. Lässt man ω gegen $0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ gehen, so strebt $R_C(\omega)$ – wie erwünscht – gegen $\infty\,\Omega$.

Auch hier hilft wieder das Modell des Schnurstroms: Eine Gummimembran ist bei Gleichstrom offensichtlich ein Nichtleiter. Wechselt aber die Schnurrichtung, so nimmt die Leitfähigkeit mit steigender Frequenz zu.

(Die Gummimembran kann bis zu einem festen Maximalwert ausgelenkt werden. Bis dieser erreicht ist, leitet die Membran. Würde sich die Stromrichtung im voll ausgelenkten Fall nicht umkehren, so wäre kein weiterer Schnurtransport möglich. Kehrt sich jedoch die Richtung um, so lässt die Membran wieder Schnur hindurch: Die Membran entspannt sich, bis sie ihre Ruheposition eingenommen hat, und spannt sich dann erneut, jedoch in die andere Richtung. Während dieses Vorgangs wird offensichtlich Schnur transportiert.)

Mit $R_L(\omega)$ und $R_C(\omega)$ konnten wir also den Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms ausdrücken. Was noch fehlt ist eine allgemeine Formel für die Spannung $U_\omega(t)$ und $I_\omega(t)$.

Für sinusförmigen Wechselstrom der Winkelgeschwindigkeit ω gilt:

$U_\omega(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$
$I_\omega(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

U_0 bzw. I_0 ist dabei der Maximalwert von U bzw. I. φ kann verwendet werden, um phasenverschobene Wechselströme auszudrücken.

Möchte man diese beiden Formeln nun auf den Gleichstrom übertragen, so muss man – wie oben bereits festgestellt – als Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ nehmen. Dann muss φ noch so gewählt werden, dass für alle Zeitpunkte t gilt:

$U_{0\,\frac{1}{\mathrm{s}}}(t) = U_0$
$I_{0\,\frac{1}{\mathrm{s}}}(t) = I_0$

Der Sinus wird bei $\frac{\pi}{2}$ ($+2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$) 1; also wird man als φ $\frac{\pi}{2}$ ($+2k\pi$) nehmen. Damit kann man den Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms betrachten; unser Ziel ist erreicht.

(Benötigte Zeit: 81 min) 05.02.2006

1.2.51 53. Hausaufgabe

Exzerpt von B. S. 266 (Energieübertragung im Wechselstromkreis) und Vergleich mit unserer Herleitung

Der grundlegende Unterschied zwischen unserer Herleitung und der im Metzler ist der, dass wir keine Angst vorm Integral haben und einen Ansatz über die Energie wählten, während man im Metzler den Bereich der Leistung nicht verlässt:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} U(t)\, I(t)\, \mathrm{d}t;$$

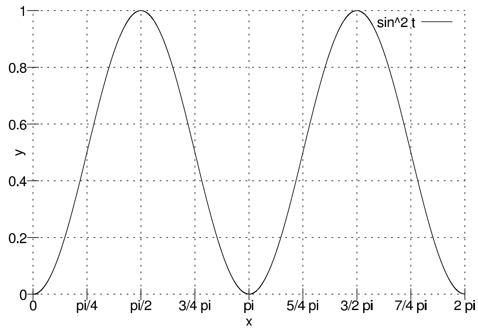
Im Metzler dagegen finden wir

$p = u\, i;$

Dies liegt vermutlich darin begründet, dass man die Leistung (wie z.B. auch die Stromstärke) leichter messen kann als die Energie (bzw. die Ladung). Wir nahmen also einen theoretischeren Ansatz, während im Metzler eine praxisorientierterer Ansatz zu finden ist.

Dementsprechend unterscheidet sich auch das weitere Vorgehen in der Herleitung: Sowohl unsere Herleitung als auch die im Metzler

nutzt die Beziehungen $U(t) = U_0 \sin \omega t$ und $I(t) = I_0 \sin \omega t$ aus. Jedoch konnten wir, weil wir den Weg übers Integral gewählt haben, sehr anschaulich fortfahren:



Dies ist – abzüglich der Konstanten U_0 und I_0 – der Graph der Funktion, die wir integrieren. „Klappt" man jeweils einen Teil des Graphen „um", so erkennt man, dass der Flächeninhalt der Fläche, die von der xAchse und dem Funktionsgraphen begrenzt wird, $\frac{T}{2}$ beträgt:

$$\int_{0\,\mathrm{s}}^{T} U(t) I(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{z.B.}}{=} U_{\max} I_{\max} \underbrace{\int_{0\,\mathrm{s}}^{T} \sin^2 \omega t\, \mathrm{d}t}_{\frac{T}{2}} = \underbrace{U_{\max} I_{\max} T}_{\text{bekannt als „}UIt\text{"}} \cdot \frac{1}{2};$$

In der Herleitung im Metzlers dagegen wird mit der undurchsichtigeren Beziehung $2 \sin^2 \omega t = 1 + \cos 2\omega t$ argumentiert.

Der letzte Teil der Herleitung – das Definieren von U_{eff} und I_{eff} ist den beiden Herleitungen gemeinsam; die beiden neuen Variablen werden mittels Substitution eingeführt:

$$\Delta E_T = \underbrace{U_{\max} I_{\max} T}_{\text{bekannt als „}UIt\text{"}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} T \overset{!}{=} U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, T;$$

Persönlich bevorzuge ich unsere Herleitung, da die Zusammenhänge zwischen Energie, Spannung und Stromstärke durchs Integral sehr deutlich werden und da man unsere Herleitung auch auf andere Wechselstromarten als den sinusförmigen Wechselstrom übertragen kann – es muss lediglich das Integral anders aufgelöst werden. Außerdem empfand ich unsere Auflösung des Integrals viel anschaulicher als das Ausnutzen der trigonometrischen Beziehung $2 \sin^2 \omega t = 1 + \cos 2\omega t$ im Metzler.

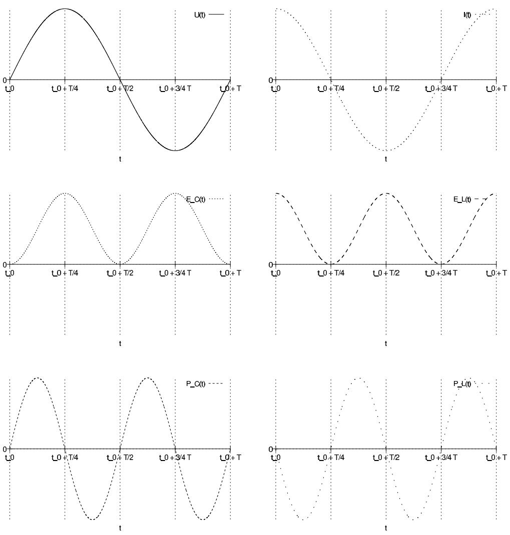
(Benötigte Zeit: 43 min + 4 min) 06.02.2006

1.2.52 54. und 55. Hausaufgabe

Graphen von $U(t)$, $I(t)$, $E_L(t)$ und $E_C(t)$ des ungedämpften Schwingkreises

- $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \sin \omega t;$
  $E_C(t) = \frac{1}{2} C U^2(t) = \frac{1}{2} C\, \frac{Q_0^2}{C^2} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2 \omega t;$
  $P_C(t) = \dot{E}_C(t) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cdot 2 \sin \omega t \cos \omega t \cdot \omega = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \omega \cdot \sin 2\omega t;$
- $I_C(t) = I_L(t) = I(t) = Q_0 \omega \cos \omega t;$
  $E_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L\, Q_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t;$
  $P_L(t) = \dot{E}_L(t) = -\frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \cdot 2 \cos \omega t \sin \omega t \cdot \omega = -\frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^3 \sin 2\omega t;$

mit $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}};$



Quantitative Graphen von $P_C(t)$ und $P_L(t)$

Aufgabestellung: Zeichnung der quantitativen Graphen von $P_C(t)$ und $P_L(t)$ mit $L = 600\,\mathrm{H}$ und $C = 40\,\mu\mathrm{F}$.

Dies ist nicht möglich, da Q_0, die initiale Ladung, die auf dem Kondensator gespeichert ist, nicht gegeben ist.

Kurzer Text zum Versuchsergebnis

Der Graph zeigte eine gedämpfte Schwingung. Die „tatsächliche“ Periodendauer T' stimmte mit der theoretisch berechneten Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{LC}$ erstaunlich gut überein; die Abweichung betrug nur $0{,}04\,\mathrm{s}$!

Die Amplitude der Schwingung nimmt mit fortschreitender Zeit streng monoton ab; dieses Abnehmen kann – wie bei Relaxationsprozessen üblich – durch die e-Funktion beschrieben werden:

$U(t_0) = U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}$;

Auflösen nach τ und Einsetzen eines beliebigen Werts für t_0 ergibt:

$U(t_0) = U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}; \Rightarrow \ln\frac{U(t_0)}{U_0} = -\frac{t_0}{\tau}; \Rightarrow \tau = -\frac{t_0}{\ln\frac{U(t_0)}{U_0}} \approx 0{,}94\,\mathrm{s}$;

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem Versuchsergebnis. (Selbstverständlich tut es dass – wir haben ja Werte des Versuchsergebnisses eingesetzt, um τ zu erhalten.)

Interessant ist auch, dass der Graph auch schon vor dem Öffnen des Schalters S (siehe Blatt) – also zu Zeitpunkten, an denen noch keine Schwingung stattfindet – eine ungedämpfte Schwingung kleiner Amplitude zeigt. Die Skalierung des Graphen lässt leider keine all zu genaue Bestimmung der Periodendauer und damit der Frequenz dieser Grundschwingung zu, aber näherungsweise ergibt sich $0{,}14\,\mathrm{s}$ als Periodendauer und $7{,}2\,\mathrm{Hz}$ als Frequenz. . .

(Benötigte Zeit: 26 min + 40 min) 08.02.2006

1.2.53 56. Hausaufgabe

Exzerpt von B. S. 119f. (Resonanz)

In der „Realität“ klingen „eigentlich“ ungedämpfte Schwingungen mit der Zeit immer ab, da immer Wärmeverluste entstehen; die Energie E_{ges} ist also nicht konstant, sondern nimmt mit der Zeit ab.

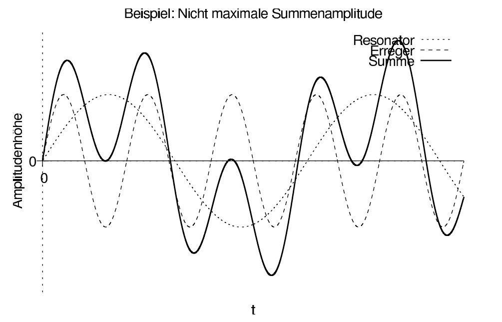
Möchte man nun trotz der Verluste eine ungedämpfte Schwingung erzeugen, so muss man dem System die durch die Verluste verlorene Energie zufügen: $E_{\mathrm{System}} + E_{\mathrm{Ersatz}}$ ist dann konstant.

Je nach System muss diese Energiezufuhr anders erfolgen: Beim elektromagnetischen Schwingkreis kann eine Wechselstromquelle in den Schwingkreis integriert werden, beim Schnurstrom lässt

man die Schnurpumpe zeitabhängig die Pumprichtung wechseln und bei einem Feder–Resonator-System erregt man die Feder durch einen entsprechenden Motor.

Die Frequenz der Generatorspannung (bzw. des entsprechenden Analogons) ist dabei keineswegs irrelevant: entspricht die Erregerfrequenz ω der Eigenfrequenz ω_0 des Resonators, so wird man eine Maximierung der Amplitude erreichen, da sich die beteiligten Spannungen gegenseitig verstärken.

Weicht aber ω von ω_0 ab, so stellt man eine geringere Amplitude fest, da sich die jeweiligen Spannungen gegenseitig abschwächen – $U_{\mathrm{ges}} = U_0 + U_{\mathrm{Generator}}$:

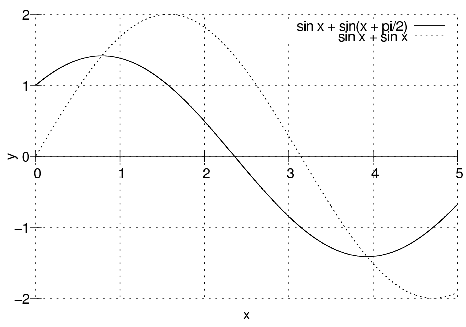


Trägt man Erregerwinkelgeschwindigkeiten ω und die resultierenden Maximalamplituden in einem Koordinatensystem auf, so erhält man eine Resonanzkurve; die Abhängigkeit der Scheitelamplitude von ω wird visualisiert.

Fragen:

- Laut Metzler stimmt die Resonanzfrequenz „in etwa“ mit der Eigenfrequenz des Resonators überein. Wieso „in etwa“ und nicht exakt?

- Wieso stellt sich eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ ein? Man erreicht die Maximalamplitude doch sicherlich bei einer Phasenverschiebung von 0, oder?

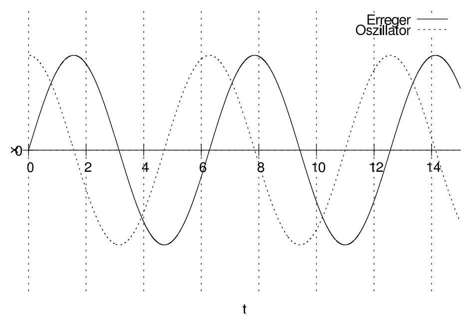


(Benötigte Zeit: 84 min) 13.02.2006

1.2.54 58. Hausaufgabe

Fünf Fragen und Antworten zur Resonanz

1. Die $\hat{x}(\omega)$-bzw. $\hat{Q}(\omega)$-oder $\hat{I}(\omega)$-Graphen unterscheiden sich qualitativ: In der Mechanik nähert sich der Graph für $\omega \to \infty$ Null asymptotisch an, der Graph zum elektromagnetischen Schwingkreis jedoch zielt auf einen bestimmten Wert (größer Null) ab. Wieso?
2. Ist bei einer stark gedämpften Schwingung eine eher kleinere Amplitude oder eine eher größere Amplitude festzustellen?
3. Welche bedeutsame Phasenverschiebung hat sich im folgenden Szenario etwa eingestellt?



4. Ist bei $x(\omega)$-bzw. $Q(\omega)$-oder $I(\omega)$-Graphen der Umschwung im Bereich der Eigenfrequenz ω_0 bei einer schwachen Dämpfung eher „hart“ oder eher „weich“?
5. Bei einer Schwingung mit äußerer Erregung wird nur sehr wenig Energie absorbiert. In welchem Bereich befindet sich dann die Phasenverschiebung zwischen Erreger-und Oszillatoramplitude?

Antworten:

1. . . .
2. Bei einer stark gedämpften Schwingung ist eine eher kleinere Amplitude festzustellen.
3. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$;
4. Bei schwachen Dämpfung verläuft der Umschwung eher hart.
5. Bei einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ ist die Energieübertragung maximal; also ist hier die Phasenverschiebung kleiner bzw. größer als $\frac{\pi}{2}$. Es kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob die Phasenverschiebung nun größer oder kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, da bei beiden Situationen die Energieübertragung gering ist.

(Benötigte Zeit: 29 min) 14.02.2006

1.2.55 59. Hausaufgabe

Gesammelte Fragen und Antworten zum Themenkreis Schwingkreis

1. **Frage:** Wie verschiebt sich beim elektromagnetischen Schwingkreis die Resonanzfrequenz f_0, wenn sich die Induktivität L oder die Kapazität C ändern? **(Johannes Dosch)**

   Antwort: Die Originalfrequenz ist

   $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

   Ändert man nun die Induktivität L oder die Kapazität C durch Ver-k-fachung, so erh ält man die neue Resonanzfrequenz f_0':

   $f_0' = \frac{1}{2\pi\sqrt{(kL)\,C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,(kC)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{kLC}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f_0;$

   f_0' ist also indirekt proportional zu $\sqrt{k}$.

   Verdoppelt man beispielsweise sowohl die Induktivität als auch die Kapazität, so wird die veränderte Resonanzfrequenz f_0' $\sqrt{2 \cdot 2} = 2$ Mal so groß sein wie die ursprüngliche Frequenz.

2. **Frage:** Wenn man bei einem Federpendel die Masse des Gewichtsstücks um $25\,\%$ erhöhen will und dennoch die ursprüngliche Resonanzfrequenz erhalten möchte, wie muss man dann die Federhärte verändern? **(Sinan Özer)**

   Antwort: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$. ω soll gleich bleiben, also muss der Quotient $\frac{D}{m}$ gleich bleiben.

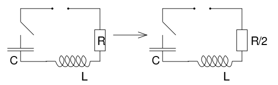
   Da man die Masse auf $125\,\%$ erhöht hat – das ω unserer Überlegungen ist also

   $\omega' = \sqrt{\frac{D}{125\,\% \cdot m}}$

   muss man die Federhärte ebenfalls um $25\,\%$ erhöhen. In diesem Fall kürzen sich dann die Faktoren auf beiden Seiten des Bruches:

   $\omega'' = \sqrt{\frac{125\,\% \cdot D}{125\,\% \cdot m}} = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega;$

3. **Frage:** Die Resonanzfrequenz eines gedämpften elektromagnetischen Schwingkreises sei f_0. Nun wird der Widerstand R halbiert. Muss die Induktivität der Spule verändert werden, um die ursprüngliche Resonanzfrequenz f_0 zu erhalten? Wenn ja, wie? **(Vladimir Golkov)**

   Antwort: Nein, der Widerstand hat mit der Resonanzfrequenz nichts zu tun.

   In der Formel für die Resonanzfrequenz – $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ – kommt der Widerstand R nicht vor. Also bleibt die Resonanzfrequenz auch ohne Eingreifen unverändert und die Induktivität muss nicht geändert werden.

4. **Frage:** Was kann man bei sehr niedrigen Frequenzen über die Phasenverschiebung aussagen? **(Florian Mühlberger)**

   Antwort: In diesem Fall ist die Phasenverschiebung sehr gering.

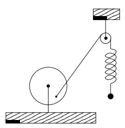
5. **Frage:** In welchen Punkten unterscheiden sich das schwingungsfähige System und der Erreger im Mechanischen und Elektrischen? **(Julian Berlow, Fernando PérezDuran)**

   Antwort: Beim Federpendel lässt sich als Erreger der bewegungsgebende Teil nennen (z.B. die Hand, die die Feder hält). Das schwingungsfähige System ist dann der Komplex aus Feder (elastischem Element) und Gewichtsstück (trägem Element).

   Beim elektromagnetischen Schwingkreis ist der Erreger das schwingungsgebende Element, also den Generator zur Erzeugung der Wechselspannung. Das schwingungsfähige System ist in diesem Fall der Komplex aus Spule und Kondensator.

6. **Frage:** Was sind die Bauteile des elektromagnetischen Schwingkreises und die Analogons beim Federpendel? Gib auch die

   Terme für die Energien der jeweiligen Komponenten an. **(Patrick Hermann)**

   Antwort:

   - Beim elektromagnetischen Schwingkreis ist die Spule das träge Element und der Kondensator das elastische.

     Die Energieinhalte lassen sich über die Zusammenhänge $I(t) = \dot{Q}(t)$ und $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$ herleiten:

     $E_L = \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2(t) = \frac{1}{2}L\left(Q_0\cos\omega t \cdot \omega\right)^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 \cdot Q_0^2\cos^2\omega t;$

     $E_C = \frac{1}{2}CU^2(t) = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q(t)}{C}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C} \cdot Q_0^2\sin^2\omega t;$

   - Beim Federpendel ist das Gewichtsstück das träge Element und die Feder das elastische.

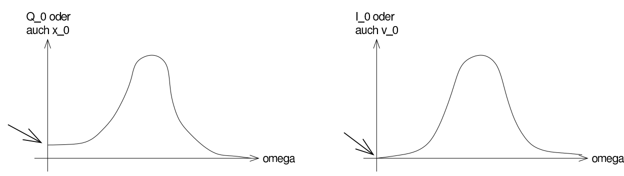
     Die Energieinhalte lassen sich über die Beziehung $v(t) = \dot{x}(t)$ herleiten:

     $E_{\text{Masse}} = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}m\left(x_0\cos\omega t \cdot \omega\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot x_0^2\cos^2\omega t;$

     $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}Dx^2(t) = \frac{1}{2}D \cdot x_0^2\sin^2\omega t;$

7. **Frage:** Die $\hat{x}_\omega$-bzw. $\hat{Q}_\omega$-oder $\hat{I}_\omega$-Graphen unterscheiden sich qualitativ: Beim elektromagnetischen Schwingkreis (Graph $\hat{I}_\omega$) ist $\hat{I}_\omega$ für sehr kleine ω sehr nahe an Null.

   Im Mechanischen dagegen beginnt der Graph bei einem festen Wert größer als Null. Wieso? **(Ingo Blechschmidt)**

   Antwort: Dieses Phänomen hat nichts mit dem Elektromagnetismus oder der Mechanik an sich zu tun, sondern mit der Wahl der Größe, welche man im Diagramm nach oben aufträgt.

   Im Mechanischen – genauer gesagt beim Federpendel – lässt sich die Auslenkung des Gewichts, also $x(t)$, einfacher messen als die Geschwindigkeit $v(t)$. Daher trägt man nach oben auch $\hat{x}_\omega$ auf und nicht $\hat{v}_\omega$.

   $x(t) = \hat{x}_\omega \cdot \sin\omega t;$

   Beim elektromagnetischen Schwingkreis dagegen ist das Messen der Stromstärke $I(t)$ sehr viel einfacher als das Messen der Kondensatorladung $Q(t)$. Demzufolge trägt man im Diagramm auch $I(t)$ statt $Q(t)$ auf.

   $Q(t) = \hat{Q}_\omega\sin\omega t;$

   $I(t) = \dot{Q}(t) = \hat{Q}_\omega \cdot \cos\omega t \cdot \omega = \underbrace{\hat{Q}_\omega\omega}_{\hat{I}_\omega} \cdot \cos\omega t;$

   $\hat{I}_\omega$ ist also $\hat{Q}_\omega \cdot \omega$. Und damit ist die Frage auf der formalen Ebene geklärt: ω ist für sehr kleine ω (um die Formulierung der Frage aufzugreifen) klarerweise sehr klein. Damit ist das Produkt aus Q_ω und ω ebenfalls klein und damit beginnt der I_ω-Graph bei Null.

   Im Mechanischen dagegen wird $\hat{x}_\omega$ – das Äquivalent von $\hat{Q}_\omega$ – aufgetragen. Dieses wird nicht mit ω multipliziert und ist daher auch nicht Null. Trägt man im Mechanischen statt $\hat{x}_\omega$ $\hat{v}_\omega$ auf, so wird man auch die selben Resultate wie beim besprochenen $\hat{I}_\omega$-Diagramm erhalten. Das „Phänomen“ liegt also nur in der Wahl der Größe begründet, welche man im Diagramm nach oben aufträgt.

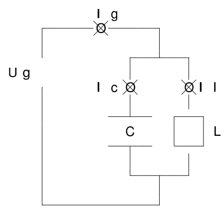
Die Frage lässt sich auch noch anschaulich beantworten: Regen wir im Mechanischen die Feder mit einem sehr kleinem ω an – sagen wir $\omega = \frac{2\pi}{100\,\mathrm{d}}$ –, so wird die Maximalgeschwindigkeit $\hat{v}_\omega$ natürlich sehr klein sein – eine Periode dauert schließlich hundert Tage.

$\hat{x}_\omega$ wird dagegen von dieser großen Periodendauer nicht beeinflusst – es dauert zwar 25 Tage bis zum Erreichen dieser maximalen Auslenkung; dies ist aber dem Graphen nicht zu entnehmen: Der $\hat{x}_\omega$-Graph gibt lediglich die maximale Auslenkung an, nicht aber die Zeit, die benötigt wird, um diese maximale Auslenkung zu erzielen.

(Benötigte Zeit: 196 min) 15.02.2006

1.2.56 60. Hausaufgabe

Wechselstromkreisanalyse



Wechselstromwiderstände von Kondensator und Spule

$R_{C_\omega} = \frac{1}{\omega C}$;

$R_{L_\omega} = \omega L$;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

$\hat{U}_G = \sqrt{2}\, U_{G_\text{eff}}$;

Terme für den Gesamtwiderstand und die Ströme $I_{G_\omega}(t)$, $I_{C_\omega}(t)$, $I_{L_\omega}(t)$

$$\Rightarrow R_\omega = \frac{1}{\frac{1}{R_{C_\omega}} + \frac{1}{R_{L_\omega}}} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC + 1};$$

$$\Rightarrow I_{G_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_\omega} = \hat{U}_G \sin\omega t \cdot \frac{\omega^2 LC + 1}{\omega L};$$

$$\Rightarrow I_{C_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_{C_\omega}} = \hat{U}_G \sin\omega t \cdot \omega C = \underbrace{\hat{U}_G \cdot \omega C}_{\hat{I}_{C_\omega}} \cdot \sin\omega t;$$

$$\Rightarrow I_{L_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_{L_\omega}} = \hat{U}_G \sin\omega t \cdot \frac{1}{\omega L};$$

Grenzwertbetrachtungen

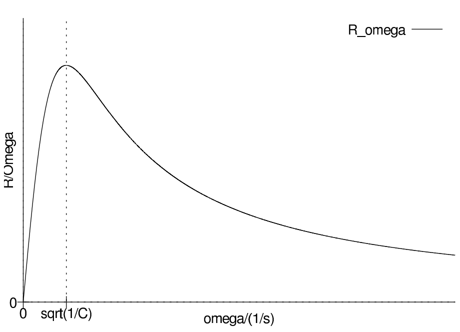
- Betrachtung des Gesamtwiderstandes R_ω:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} R_\omega = 0\,\Omega$; (Einsetzen)
  $\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} R_\omega = 0\,\Omega$; (Grad des Polynoms des Zählers kleiner als der des Nenners)
  $R_{\omega_0} = \frac{L}{\sqrt{LC}\left(\frac{1}{LC}LC + 1\right)} = \sqrt{\frac{L}{2C}}$;
  Anschaulich: Bei $\omega \to 0\frac{1}{\mathrm{s}}$ liegt Gleichstrom vor; der Kondensator leitet also gar nicht und die Spule ideal. Bei $\omega \to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}$ leitet die Spule gar nicht und der Kondensator ideal.
- Betrachtung des Stroms durch den Kondensator $C_{L_\omega}(t)$:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{C_\omega}(t) = 0\,\mathrm{A}$; (Einsetzen)
  Bei Gleichstrom ist der Kondensator ein Nichtleiter, $I_{C_\omega}(t)$ ist Null.
  $\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{C_\omega}(t)$ ist nicht definiert (Sinus konvergiert nicht).
  Stattdessen Betrachtung von $\hat{I}_{C_\omega}$:
  $\hat{I}_{C_\omega} = \hat{U}_G \cdot \omega C \to \infty\,\mathrm{A}$ für $\omega \to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}$;
  $I_{C_{\omega_0}}(t) = \hat{U}_G \sin\sqrt{\frac{t^2}{LC}} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$;
- Betrachtung des Stroms durch die Spule $I_{L_\omega}(t)$:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{L_\omega}(t) = \lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} \frac{\hat{U}_G}{L}\frac{\sin\omega t}{\omega} = \lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} \frac{\hat{U}_G}{L}\frac{\sin\omega t}{\omega t}\cdot t = \frac{\hat{U}_G}{L}\cdot t$; ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)

Damit nimmt der Strom proportional mit der Zeit zu. Dies entspricht unseren Erwartungen: Da die Spule bei Gleichstrom ($\omega \to 0\frac{1}{\mathrm{s}}$) ein idealer Leiter ist, ist ihr Widerstand Null und damit geht der Strom für $t \to \infty\,\mathrm{s}$ gegen Unendlich.
$\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{L_\omega}(t) = 0\,\mathrm{A}$; (Zähler „schwankt" zwischen $-\hat{U}_G$ und $\hat{U}_G$, Nenner geht gegen Unendlich)
Die Spule ist bei „unendlich frequenten" Wechselstrom ein Nichtleiter.
$I_{L_{\omega_0}}(t) = \hat{U}_G \sin\sqrt{\frac{t^2}{LC}} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$;

Abschließende Bemerkungen

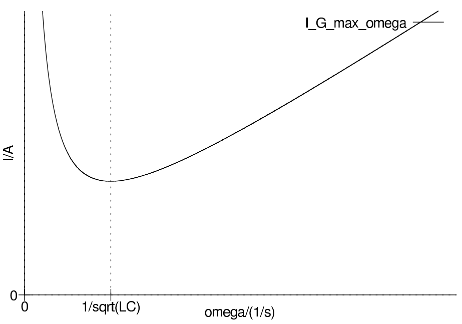
Im Resonanzfall ist $I_{C_{\omega_0}}(t)$ für alle Zeitpunkte t gleich $I_{L_{\omega_0}}(t)$!

Graph des Gesamtwiderstandes in Abhängigkeit von ω



Interessant ist, dass der Gesamtwiderstand bei $\omega = \sqrt{\frac{1}{C}}$ ist (ermittelbar durch den Ansatz $R'_\omega = 0\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$). Dieses ω ist nicht von L abhängig!

Graph der maximalen Generatorstromstärke in Abhängigkeit von ω

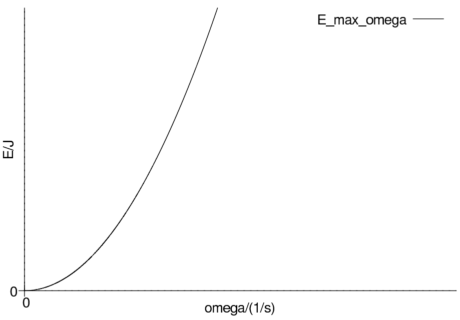


Interessant ist, dass die Scheitelstromstärke des Generators bei ω_0 minimal ist (ermittelbar durch den Ansatz $\hat{I}'_{G_\omega} = 0\,\mathrm{C}$).

Graph der maximalen Energie in Abhängigkeit von ω

$E_{\max_\omega} = E_{L_{\max_\omega}} + E_{C_{\max_\omega}} = \frac{1}{2}L\omega^2 \cdot \hat{Q}^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}\frac{1}{C} \cdot \hat{Q}^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}\hat{Q}^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)\left(L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}\hat{Q}^2\left(L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)$;

Also nimmt der maximale Energieinhalt mit größer werdendem ω zu; es ergibt sich kein Umkehrpunkt.



(Benötigte Zeit: 140 min)

20.02.2006

1.2.57 63. Hausaufgabe

Fragen zu den Abituraufgaben

- Gilt im Resonanzfall nur $\hat{I}_{L_{\omega_0}} = \hat{I}_{C_{\omega_0}}$ oder auch $I_{L_{\omega_0}}(t) = I_{C_{\omega_0}}(t)$? (Meine Rechnung scheinen letzteres zu bestätigen.)
- Können all unsere bekannten Gesetze für den Gleichstromkreislauf – z.B. $I = \frac{U}{R}$, $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$ etc. – auch für den Wechselstromkreislauf, sofern man alle von der Zeit abhängigen Größen (I, U) durch die jeweiligen Scheitelgrößen ersetzt ($\hat{I}$, $\hat{U}$)?

Eindruck des wissenschaftlichen Texts der Stunde

Das Lesen des „echten“, nicht an die Lehre in Schulen angepassten, Textes war sehr aufschlussreich. Interessant dabei war, dass – obwohl wir lange nicht alle Fachbegriffe kannten – wir uns dennoch ein Bild der angesprochenen Problematik machen konnten.

Auch interessant war, dass wir die abgedruckten Graphen über ihre reine Syntax hinaus deuten konnten und dass es uns möglich war, sie auch mit unseren bisherigen Erfahrungen zu vergleichen und somit auch wieder Rückschlüsse über den Inhalt des Texts ziehen zu können.

Dies soll allerdings natürlich nicht heißen, dass nicht „Augenwischerei“ auch im Spiel war: Beispielsweise wurde die „Drehung eines Felds“ angesprochen. Oberflächlich betrachtet scheint dieser Begriff einleuchtend zu sein und keine Schwierigkeiten zu bereiten. Entschließt man sich jedoch, sich näher mit dem Begriff zu beschäftigen, wird klar, dass die Problematik ganz und gar nicht trivial ist:

Was versteht man unter einer „Drehung eines Felds“? Wie dreht man sich um ein Feld? Gibt es qualitative Unterschiede zwischen einer Verschiebung (Translation) und einer Drehung? Wie hält man überhaupt die relative Position gegenüber einem Feld fest? Und wie macht man die Positionsveränderung eines Feldes aus?

Während dies bei einem Körper für uns trivial ist – beispielsweise weist ein Stift eine Richtung auf, anhand derer wir mögliche Translations- oder Drehbewegungen festmachen k önnen. Bei einem Feld – was wir üblicherweise durch (unendlich viele) Feldlinien visualisieren – ist eine derart einfache Feststellung der Ausrichtung eines Felds allerdings nicht möglich.

Ebenfalls theoretisch sehr interessant sind wohl die Effekte, die beim sehr schnellen Drehen eines Felds auftreten: Wie schon mal notiert sind auch Felder träge, innere Bereich des Felds werden also schneller einer aufgezwungenen Drehung nachkommen als äußere, vom Drehmittelpunkt weit entfernte Bereiche.

(Benötigte Zeit: 48 min)

21.02.2006

1.2.58 64. Hausaufgabe

Abituraufgabe 20016/1

Im idealen elektromagnetischen Schwingkreis haben die Spule und alle leitenden Verbindungen keinen OHMschen Widerstand.

a) Leiten Sie für die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator die Differentialgleichung

$L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0\,\mathrm{V}$

der ungedämpften Schwingung her.

$U_{\text{ges}} = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow U_L + U_C = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow L\dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow$

$L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0\,\mathrm{V};$

b) Leiten Sie her, welcher Zusammenhang zwischen den Größen L, C und ω bestehen muss, damit $Q(t) = Q_0 \cdot \cos\omega t$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

$Q(t) = Q_0 \cdot \cos\omega t;$

$\Rightarrow -L\omega 2 \cdot Q_0 \cdot \cos\omega t + \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot \cos\omega = 0\,\mathrm{V}; \Rightarrow -L\omega^2 + \frac{1}{C} = 0\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}; \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC};$

Stellen Sie mit dieser Lösung die elektrische und magnetische Energie jeweils als Funktion der Zeit dar und überprüfen Sie die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes.

$E_L(t) = \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2(t) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2 \cdot \sin^2\omega t;$

$E_C(t) = \frac{1}{2}CU^2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2 \cdot \cos^2\omega t;$

$\Rightarrow E_{\text{ges}}(t) = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}Q_0^2\left(L\omega^2 \cdot \sin^2\omega t + \frac{1}{C} \cdot \cos^2\omega t\right) =$
$= \frac{1}{2}Q_0^2\left(L\frac{1}{LC} \cdot \sin^2\omega t + \frac{1}{C} \cdot \cos^2\omega t\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2$ ist konstant.

c) Aus einem Kondensator der Kapazität $60\,\mu\mathrm{F}$ und einer Spule der Induktivität $250\,\mathrm{mH}$ wird ein Schwingkreis gebaut, dessen Schwingungen als ungedämpft betrachtet werden sollen. Am Anfang liegt die maximale Spannung $90\,\mathrm{V}$ am Kondensator.

Nach welcher Zeit ist die Kondensatorspannung zum ersten Mal auf $30\,\mathrm{V}$ gesunken? Wie groß ist dann die Stromstärke im Schwingkreis?

$U_C(t_1) = \frac{Q(t_1)}{C} = U_0 \cdot \cos\omega t_1 = 30\,\mathrm{V};$

$\Leftrightarrow \cos\omega t_1 = \frac{1}{3};$

$\Rightarrow \omega t_1 \approx 1{,}23;$

$\Rightarrow t_1 \approx \frac{1{,}23}{\omega} \approx 4{,}77 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s};$

$I(t_1) = \dot{Q}(t_1) = -\omega Q_0 \cdot \sin\omega t_1 = -CU_0 \cdot \omega \cdot \sin\omega t_1 \approx -1{,}3\,\mathrm{A};$

Zusammenfassung der Stunde: Leistung als Energiestromstärke

Ein Spannungsmessgerät benötigt zwei Anschlüsse, da der Ausdruck „Spannung“ nur dann sinnig ist, wenn man als Spannung die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten misst. „Spannung an einem Punkt“ ist nicht sinnig.

(Natürlich ist es in der Umgangssprache zulässig, von der „Spannung am Kondensator“ zu reden – in diesem Fall meint man aber eigentlich die Spannung zwischen den beiden Polen des Kondensators)

Die Stromstärke dagegen misst man an einem Punkt, genauer: an einer bestimmten Fläche, nämlich der Querschnittsfläche durch einen Leiter.

Genau so ist es auch mit der Leistung: Die Leistung – als die Stromstärke der Energie – misst man ebenfalls mit Hilfe einer bestimmten Fläche. Möchte man die Leistung an einer bestimmten Stelle eines Kabels messen, so betrachtet man die Energie, die durch eine Querschnittsfläche des Leiters fließt.

Möchte man jedoch die Leistung eines größeren Objekts betrachten – z.B. eines Kondensators oder eine Spule – ist nicht klar, was (z.B.) die „Querschnittsfläche“ einer Spule ist. Daher ist diese Vereinfachung nicht zulässig und man muss stattdessen den Energiefluss durch eine Hüllfläche betrachten.

Integriert man nun über die Hüllfläche die Energiestromstärkedichten ($\left[1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot m^2}}\right]$) auf, so erhält man die Leistung des sich im Inneren des durch die Hüllfläche aufgespannten Raums befindlichen Objekts bzw. der Objekte.

Der Begriff „Leistung“ ist veraltet. „Energiestromstärke“ tritt die Bedeutung besser und verschleiert nicht die Zusammenhänge. Die ursprüngliche Wahl des Begriffs „Leistung“ kommt wohl daher, dass zu dem Zeitpunkt, als der Leistungsbegriff eingeführt wurde, das Wissen über Energie noch sehr begrenzt war.

Außerdem kann man im Allgemeinen Leistung (wie auch Stromstärke) einfacher messen als Energie (bzw. Ladung). Mit dieser Einstellung im Hinterkopf liegt es natürlich nicht nahe, den viel abstrakteren Begriff „Energie“ in die Namensgebung miteinzubeziehen.

Kommt man jedoch von einem theoretischen Standpunkt, liegt es sehr nahe, die „Grundbegriffe“ (Energie, Ladung) statt der abgeleiteten Begriffe (Leistung, Stromstärke) zu verwenden.

Zusammenfassung der Stunde: Durchschnittswerte

Interessant ist die Frage, was beim elektromagnetischen Schwingkreis die Durchschnittswerte der Ladung, der Stromstärke, der Spannung, der Leistung und der Energie sind.

Dabei ist die so gestellte Frage unscharf formuliert: Die Angabe eines Intervalls, über das der Durchschnittswert berechnet werden soll, ist unverzichtbar. Dabei hat man sich auf eine Periode als Standard geeinigt.

Beim elektromagnetischen Schwingkreis ist die durchschnittliche Stromstärke, wie auch die Ladung und die Spannung, Null: Positive Werte wechseln sich mit negativen gleichmäßig ab.

Auch ist die durchschnittliche Leistung Null; es wechseln sich ebenfalls positive und negative Werte ab. Die durchschnittliche Energie dagegen ist nicht Null: Die Energie – proportional zu $I^2(t)$ bzw. $U^2(t)$ – ist immer größergleich Null. Somit kann die Durchschnittsenergie nicht Null sein.

Zusammenfassung der Stunde: Umgehen mit „zusammengesetzten" Integralen

Da die Rechenregel $\int_a^b \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ gilt, liegt es nahe, auch die Gültigkeit der von $+$ auf $\cdot$ übertragenen Regel zu vermuten, also $\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$.

Diese Gleichung gilt allerdings nur in Sonderfällen; sie ist allgemein nicht gültig. Beispiel:

$\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0;$

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \pi \neq \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0;$

Ähnliches gilt für den Term für den Energieinhalt mit U und I:

$\int_{t_0}^{t_0+T} U(t)\,I(t)\,\mathrm{d}t \neq 0\,\mathrm{J},$

obwohl das Integral von sowohl $U(t)$ als auch $I(t)$ nach einer vollständigen Periode Null ist.

(Benötigte Zeit: 83 min) 28.02.2006

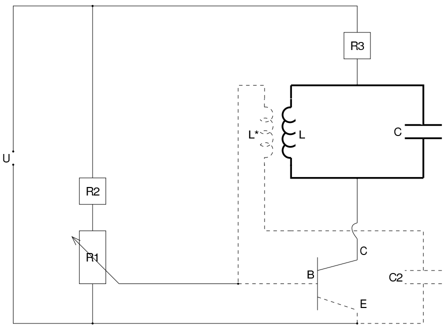
1.2.59 66. Hausaufgabe

Gesamtgemäldeteil: Rückkopplungsschaltung nach Meißner

In der Realität sind elektromagnetische Schwingungen, wie sie durch Schwingkreise erzeugt werden können, immer gedämpft: Alle Kabel weisen einen kleinen, aber von Null verschiedenen OHMschen Widerstand auf, und auch Kondensator und Spule sind nicht frei von Randeffekten.

Möchte man trotzdem ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen erzeugen, so kann man sich einer Rückkopplungsschaltung bedienen. Um die Dämpfung auszugleichen fügt eine Rückkopplungsschaltung dem schwingenden System Energie zu.

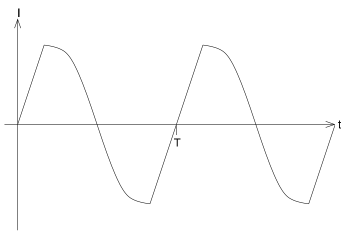
Bei der praktischen Umsetzung der Idee der Rückkopplungsschaltung sind jedoch einige Probleme zu beachten, welche anhand der Rückkopplungsschaltung nach Meißner erläutert werden sollen.



Diese Schaltung sieht auf den ersten Blick ziemlich unübersichtlich aus. Erst nach näherer Betrachtung wird die Bedeutung der einzelnen Teilelemente der Schaltung klar:

- Das zugrundeliegende Prinzip ist, in den richtigen Momenten dem Schwingkreis (fett) Energie zuzuführen. Die Energie wird mittels Gleichstrom der Gleichspannungsquelle (mitte links) übertragen.

Betrachtet man ein $Q(t)$-oder $I(t)$Ðiagramm des Schwingkreises, so wird man eine Deformierung gegenüber dem Sinus feststellen: In den Momenten der Energiezufuhr steigt der Graph wesentlich steiler an.



- Aus Bequemlichkeitsgründen möchte man eine Gleichspannungsquelle anstatt einer Wechselspannungsquelle zur Energiezufuhr verwenden.

  Würde man eine Wechselspannungsquelle verwenden, könnte man die Schaltung vereinfachen: Man würde einfach als Wechselspannungsfrequenz f die Eigenfrequenz des Schwingkreises f_0 hernehmen und Spannungsquelle und Schwingkreis permanent miteinander verbinden.

  Schnell würde sich die für die Energieübertragung optimale Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ einstellen; somit könnte also permanent Energie zugeführt werden.

  In der Praxis treten allerdings mehrere Probleme mit diesem Vorgehen auf, weswegen man eine Gleichspannungsquelle als Energielieferant bevorzugt:

  – Zum einen möchte man gerne Schwingungen unterschiedlicher Frequenz erzeugen. Damit die Energieübertragung von Spannungsquelle zu Schwingkreis maximal bliebe, müsste man bei Änderung der Eigenfrequenz des Schwingkreises auch die Wechselspannungsfrequenz der Spannungsquelle ändern.

  – Zum anderen ist es technisch sehr schwierig, Spannungsquellen sehr hoher Wechselspannungsfrequenzen herzustellen – während z.B. ein Schwingkreis der Eigenfrequenz $120\,\mathrm{MHz}$ einfach zu realisieren ist (passende Kondensatoren und Spulen vorausgesetzt), ist es sehr schwierig, eine passende Spannungsquelle zu finden.

    Bei heutigen Hochfrequenzwechselspannungsquellen gibt es außerdem das Problem, dass die Frequenz nicht so exakt einstellbar ist, wie man es gerne hätte; folglich könnte man die Energieübertragung nicht maximieren, da man die Frequenz der Spannungsquelle f nicht exakt an die Eigenfrequenz des Schwingkreises f_0 angleichen könnte.

  – Schließlich sind Gleichspannungsquellen sehr viel billiger als Wechselspannungsquellen.

- Nutzt man also eine Gleichspannungsquelle als Energielieferant, so kann man nicht naiv vorgehen und einfach die Spannungsquelle mit dem Schwingkreis leitend verbinden:

  Da die Spannung der Gleichspannungsquelle die Hälfte der Zeit lang immer entgegengesetzt zur Schwingkreisspannung gepolt ist, würde eine leitende Verbindung die Schwingung die Hälfte der Zeit lang abschwächen, anstatt sie zu verstärken.

Stattdessen nutzt man eine zweite Spule (gestrichelt), um das Problem der zeitlichen Koordinierung in den Griff zu bekommen.

Der Strom durch die Spule des Schwingkreises erzeugt ein Magnetfeld. Mit der Änderung der Stromstärke geht nun eine Änderung des Magnetfelds – ein $\dot{\phi}$ – einher.

Adjazent zur Spule des Schwingkreises befindet sich die zweite Spule L^*, in der durch die Änderung des magnetischen Flusses – $\dot{\phi}$ – eine Spannung induziert wird.

Also wird das Signal „jetzt bitte Energie schicken, danke" übers Magnetfeld an die zweite Spule übermittelt. Natürlich kostet diese Singalübermittlung Energie – aber das bisschen Energie, welches durch die Übermittlung verloren geht, steht in keinem Verhältnis zur Energie, die dem Schwingkreis daraufhin durch die Gleichspannungsquelle zugeführt wird.

Die Kombination aus Spulenpaar und Transistor zur Verstärkung löst zum einen das schon angesprochene Problem, dass man die

Wechselspannungsfrequenz f der Spannungsquelle an die Eigenfrequenz des Schwingkreises f_0 anpassen müsste.

Außerdem ist die Phasenverschiebung von vornherein optimiert, das System muss sich nicht erst einschwingen. Dies hat den Grund, dass die Spule nicht proportional zum magnetischen Fluss ϕ, sondern zur Änderung des magnetischen Flusses $\dot{\phi}$ reagiert:

Ist ϕ beispielsweise proportional zu $\sin \omega t$, so ist $\dot{\phi}$ proportional zu $\cos \omega t$. Die Phasenverschiebung zwischen Sinus und Kosinus beträgt nun gerade – wie gewünscht – $\frac{\pi}{2}$.

Bei entsprechender Eingangsspannung (Kennlinie!) verstärkt der Transistor den Strom (Kollektor–EmitterKreis); somit wird dem Schwingkreis Energie zugeführt, das Grundprinzip ist erklärt. Es bleiben aber noch einige weitere Fragen:

- „Wozu benötigt man den Kondensator C_2 im Basis–Emitter-Stromkreis (gestrichelt)?“

  Der Kondensator als ein elastisches Element lässt bekanntlich nur Wechselstrom durch; für Gleichstrom ist der Kondensator ein Nichtleiter. Formal kann dies mittels der Formel für den Kondensatorwiderstand gezeigt werden:

  $R_C = \frac{1}{\omega C}$;

  Demzufolge ist der Widerstand für hochfrequenten Wechselstrom (großes ω) gering und für Gleichstrom ($\omega \to 0\frac{1}{s}$) sehr hoch.

  Durch diese Blockierung von Gleichstrom wird ein sonst auftretender Kurzschluss verhindert: Der Strom würde (größtenteils) von der Spannungsquelle in den Basis–EmitterStromkreis und wieder zurück fließen. Durch den Kondensator, der bei Gleichstrom als ein sehr großer Widerstand wirkt, wird dieses Problem sehr elegant gelöst.

- „Welchen Zweck haben die beiden OHMschen Widerstände R_1 und R_2?“

  R_1 und R_2 vermindern die am Transistor anliegende Spannung. Damit wird versucht, den Arbeitspunkt des Transistors zu erreichen – den Punkt, an dem die Transistorreaktion am größten ausfällt.

- „Wozu benötigt man den Widerstand R_3?“

  R_3 benötigt man nur aus praktischen Überlegungen: Die am Schwingkreis anliegende Spannung wird mittels R_3 reduziert – möglicherweise sind $12\,\mathrm{V}$Batterien billiger als $11\,\mathrm{V}$Batterien, der Schwingkreis soll aber gerade mit $11\,\mathrm{V}$ betrieben werden.

Außerdem ist noch ungeklärt, welche Polung die verschiedenen Bestandteile der Schaltung aufweisen müssen. Diese Frage ist aber – trotz ihrer offensichtlichen Praxisrelevanz – für uns nicht weiter wichtig. Das zugrundeliegende Prinzip, um dessen Verstehen wir uns bemühen, ist nicht von einer bestimmten Polung abhängig.

Siehe auch:

- Metzler, S. 278
- »http://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%BCckkopplung«
- »http://de.wikipedia.org/wiki/MeissnerSchaltung «

Gesamtgemäldeteil: Kennlinien, speziell: Transistorkennlinien

Allgemein beschreibt eine Kennlinie eine Eigenschaft eines Objekts in Abhängigkeit von genau einem Parameter. Trägt man beispielsweise in ein Koordinatensystem nach rechts den Stückpreis und nach oben den Gewinn auf, so kann man die resultierende Kurve als Kennlinie bezeichnen.

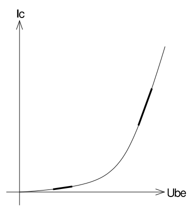
Dabei zu beachten ist, dass man üblicherweise weder die Zeit noch von der Zeit abhängige Größen aufträgt, sondern ausschließlich von der Zeit unabhängige Parameter. Dies kann, wenn man die zeitliche Dynamik eines Systems im Blick hat, anfangs verwirrend sein.

Je nach untersuchtem Objekt kann man auch von der nach rechts aufgetragenden Größe als Input und von der nach oben aufgetragenden Größe als Output oder Reaktion sprechen.

Für uns im Kontext der Rückkopplungsschaltung nach Meißner sind Transistorkennlinien besonders wichtig. Üblicherweise geben Transistorkennlinien die Kollektorstromstärke in Abhängigkeit der

Basisstromstärke an; oft wird aber auch die Basis–EmitterSpannung als Parameter hergenommen.

An einer Kennlinie kann man den Arbeitspunkt eines Transistors, den Punkt, an dem die Transistorreaktion maximal ist, ablesen:



Ändert man die Basis–EmitterSpannung im unteren Bereich (links), so fällt die Änderung der Kollektorstromstärke gering aus. Die gleiche Spannungsänderung in der Nähe des Arbeitspunkts (rechts) bewirkt eine wesentlich größere Transistorreaktion.

In der Praxis versucht man daher mittels geeigneter Widerstände den Arbeitspunkt zu treffen, also die Basis–EmitterSpannung in den Bereich des Arbeitspunkts zu bringen.

Siehe auch:

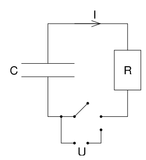
- Metzler, S. 444
- »http://de.wikipedia.org/wiki/Kennlinie«

02.03.2006

Gesamtgemäldeteil: Kondensatorentladung

Zur Einführung ins Thema „Schwingkreis“ betrachteten wir die Entladung eines Kondensators über einen OHMschen Widerstand.

Ein aufgeladener Kondensator wird mit einem Widerstand leitend verbunden, ein in Reihe geschaltetes AMPÈREmeter misst den Entladestrom.



Der Entladestrom $I(t)$ nimmt mit der Zeit exponentiall ab; zur theoretischen Erklärung setzt man eine Differentialgleichung an, welche aus der KIRCHHOFFschen Maschenregel folgt:

$$\begin{aligned} U_C + U_R &= 0\,\mathrm{V}; \\ \frac{Q(t)}{C} + RI(t) &= 0\,\mathrm{V}; \\ \frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) &= 0\,\mathrm{V}; \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(t) = \hat{Q}e^{-\frac{t}{\tau}}$;

$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{\hat{Q}}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$;

Was passiert nun aber, wenn man in den Stromkreis seriell noch einen zweiten Kondensator der gleichen Kapazität einfügt? Aus der Maschenregel folgt:

$$\begin{aligned} U_{C_1} + U_{C_2} + U_R &= 0\,\mathrm{V}; \\ \frac{Q_1(t)}{C} + \frac{Q_2(t)}{C} + RI(t) &= 0\,\mathrm{V}; \end{aligned}$$

Die Gesamtladung ist konstant; es gilt also zusätzlich: $Q_1(t)+Q_2(t) = Q_0$; (Zu Beginn sei nur einer der Kondensatoren geladen, der andere leer.)

Diese Beziehung vereinfacht die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}Q_1(t) + \frac{1}{C}\left(Q_0 - Q_1(t)\right) + RI(t) &= 0\,\mathrm{V}; \\ \frac{Q_0}{C} + RI(t) &= 0\,\mathrm{V}; \\ I(t) &= -\frac{Q_0}{RC}; \end{aligned}$$

Hier liegt nun anscheinend ein Fehler vor: Der hergeleiteten Gleichung zufolge ist der Strom in Richtung und Stärke konstant; einer der Kondensatoren würde sich also unbegrenzt entladen und der andere würde sich unbegrenzt aufladen.

Wo liegt der Denkfehler?

[Antwort: Das Problem liegt im Ansatz über die Ladungserhaltung – die Gesamtladung ist immer $0\,\mathrm{As}$. Man müsste über´s Dipolmoment gehen (was keine Erhaltungsgröße ist), aber das liegt jenseits der Schulmathematik; enthält das elastische Element im Mechanischen Schnur?]

Siehe auch:

- ≫http://www.hcrs.at/KOND.HTM≪
- ≫http://www.hcrs.at/SCHWING2.HTM≪

(Benötigte Zeit: 319 min) 08.03.2006

1.2.60 67. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde unter beliebiger Schwerpunktsetzung: Wirkungen gleichzeitiger $\mathcal{E}$-und $\mathcal{B}$Felder

Analysieren wir folgendes Gedankenexperiment: Zwei Ladungen q_1 und q_2 bewegen sich beide mit der selben Geschwindigkeit v in die selbe Richtung, ihre Bewegungsbahnen sind also parallel zueinander. Es wirkt keine äußere beschleunigende Kraft.

Die beiden Ladungen sind selbstverständlich von einem elektrischen Feld umgeben. Zusätzlich existiert ein magnetisches Feld, da sich beide Ladungen bewegen, also ein Strom vorhanden ist.

Dementsprechend wirken sowohl elektrische als auch magnetische Kraft; die Kraft auf q_1 errechnet sich zu:

$F_1 = F_{1_{\mathcal{E}_2}} + F_{1_{\mathcal{B}_2}} = \mathcal{E}_2 q_1 + \mathcal{B}_2 q_1 v_1;$

Die magnetische Kraft ist dabei entgegen der elektrischen gerichtet (sowohl für positive als auch negative Ladungen), wie die Anwendung der Drei–FingerRegel zeigt:

Bei positiven Ladungen entspricht die Bewegungsrichtung der technischen Stromrichtung. Das Magnetfeld von q_2 zeigt nach oben (Rechte–HandRegel), also ist die Lorentzkraft zu q_2 hin gerichtet.

Bei negativen Ladungen dreht sich die Stromrichtung und die Magnetfeldrichtung um – die Lorentzkraft ist wieder zu q_2 hin gerichtet.

Wechselt man jetzt jedoch das Bezugssystem, betrachtet man die Situation beispielsweise von q_1 aus, so stellt man ein anderes Ergebnis fest: Da sich aus der Sicht von q_1 keine der beiden Ladungen bewegt, existiert kein magnetisches Feld; die Kraft auf q_1 ist also:

$F_1' = F_{1_{\mathcal{E}_2}} = \mathcal{E}_2 q_1;$

Also wirken auf die Ladungen – je nach Wahl des Bezugssystem – unterschiedlich große Kräfte! Ist dies nicht ein Widerspruch?

Lässt man beispielsweise in einem fahrenden Auto einen Ball fallen, so wirkt auf ihn die Gewichtskraft, unabhängig der Wahl des Bezugssystems – unabhängig, ob man als Bezugssystem das Auto (senkrechter Fall nach unten), oder ob man als Bezugssystem die Straße wählt (schräger Fall nach unten).

Die Bewegung ist zwar unterschiedlich, die Beschleunigung (bzw. die Kraft), jedoch nicht. Im obigen Beispiel im Elektromagnetismus hängt aber auch die Beschleunigung von der Bezugssystemwahl ab.

(Benötigte Zeit: 51 min) 12.03.2006

1.2.61 68. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: HERTZscher Dipol

Zum Verständnis des HERTZschen Dipols gehen wir zunächst von einem einfachen elektromagnetischen Schwingkreis mit Spule und Kondensator aus.

[Grafik: Normaler elektromagnetischer Schwingkreis]

Die sich nach einer Kondensatoraufladung abspielenden Phänomene sind uns bekannt – die Kondensatorladung, die Stromstärke und die Spannung schwingen sinusförmig; die Winkelgeschwindigkeit errechnet sich über die KIRCHHOFFsche Maschenregel zu $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Verkleinert man die Kondensatorkapazität und die Spuleninduktivität – beispielsweise durch Vergrößerung des Plattenabstands bzw. Verringerung der Windungszahl –, so nimmt die Frequenz zu – $f \sim \omega \sim \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

[Grafik: Elektromagnetischer Schwingkreis mit weniger Spulenwindungen und größerem Plattenabstand]

Vergrößert man den Plattenabstand weiter – sagen wir auf $5\,\mathrm{m}$ –, ähnelt das Ergebnis immer weniger dem gewohnten Bild des Kondensators.

[Grafik: Elektromagnetischer Schwingkreis mit weniger Spulenwindungen und sehr großem Plattenabstand]

Zur weiteren Kapazitätsreduzierung kann man die Kondensatorplatten entfernen; übrig bleiben dann die Kabelenden. Um die Induktivität zu reduzieren, kann man statt einer Spule einfach das gebogene Kabel hernehmen („Windungszahl $\frac{1}{2}$").

[Grafik: Gebogener elektromagnetischer Schwingkreis ohne Kondensatorplatten]

Eine weitere Reduzierung der Induktivität erreicht man durch Aufheben der Biegung – kurz: Man verwendet einen einfachen Draht, ohne Kondensator und ohne Spule.

Hierbei sind Kapazität und Induktivität delokalisiert, ähnlich wie in der Chemie die Doppelbindungen von Aromaten delokalisiert sind.

Wird ein solcher Draht – ein HERTZscher Dipol – angeregt, so strahlt er eine elektromagnetische Welle ab.

Der Name geht auf Heinrich Rudolf Hertz zurück, der als erster elektromagnetische Wellen experimentell nachweisen konnte. Zuvor wurden sie schon von Maxwell in Form der MAXWELLschen Gleichungen, insbesondere der dritten, postuliert: Elektrische und magnetische Felder sind gekoppelt; die zeitliche Änderung des einen bewirkt die Entstehung des anderen.

Fragen:

- Bekanntlich sind physikalische Vorgänge immer im mathematischen Sinne stetig, es gibt keine sprunghaften Änderungen. Demzufolge gibt es wohl auch keine Sprungfrequenz, ab der ein Schwingkreis elektromagnetische Wellen abstrahlt – richtig?
- Die bisher betrachteten Schwingkreise (elektromagnetischer und verschiedene mechanische) zeigten große Übereinstimmungen und Symmetrien; es konnten immer Analogien zwischen den Modellen hergestellt werden.

  Bei hochfrequenten elektromagnetischen Schwingkreisen scheint diese Symmetrie aber gebrochen: Hochfrequente mechanische Schwingkreise strahlen keine Wellen ab.

  Gibt es eine Möglichkeit, die Symmetrie zu „retten"?
- Wie kommt es zur Abschnürung des elektromagnetischen Felds?

- Wäre die Größe des Universums nicht vernachlässigbar groß, würde dann die durch elektromagnetische Wellen abgestrahlte Energie wieder zum Dipol zurückfließen, ähnlich dem besprochenen mechanischen Modell mit einer endlichen Gummimembran? (Ist die Frage überhaupt sinnvoll?)

(Benötigte Zeit: 77 min) 13.03.2006

1.2.62 69. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: LecherŁeitung als entarteter Schwingkreis?

Es sprechen einige Argumente dafür, dass die LecherŁeitung als ein entarteter Schwingkreis angesehen werden kann.

Zum einen existiert ein träges Element, eine Induktivität: Der Leiter selbst weist in der Realität eine von Null verschiedene Induktivität auf. Außerdem kann die gebogene Form des Leiters als eine Spulenwindung betrachtet werden.

Außerdem existiert ein elastisches Element, eine Kapazität: Offensichtlich ist das elektrische Feld zwischen den Leiterenden. Weniger offensichtlich sind die elektrischen Felder zwischen den Leiterteilen:

Aus der Grafik kann man die Existenz dreier Kondensatoren entnehmen: ganz links, in der Mitter, ganz rechts.

Damit eine Anordnung als Schwingkreis bezeichnet werden kann, muss ein elastisches und ein träges Element existieren; beides ist hier der Fall. Also ist es zulässig, von der LecherŁeitung als einen entarteten Schwingkreis zu sprechen.

Es ist wichtig, das konkret fassbare – beispielsweise die Platten des Plattenkondensators oder die Windungen der Spule – zu abstrahieren – also zur Kapazität (elastisches Element) bzw. zur Induktivität (träges Element) zu gelangen.

Erst dann ist es beispielsweise möglich, die LecherŁeitung sofort als Schwingkreis zu sehen. Außerdem sind die abstrakten Elemente tragfähiger: Während sich die Form des Kondensators mit der Zeit immer weiter verändern wird, oder auch ganz neue Wege entdeckt werden, wird das dahinterstehende abstrakte Konzept dasselbe bleiben.

Dies hilft der mentalen Verknüpfung: Das konkret Fassbare (Plattenkondensator) abstrahiert man (Kapazität, elastisches Element), um später vom Abstrakten wieder zurück gelangen zu können.

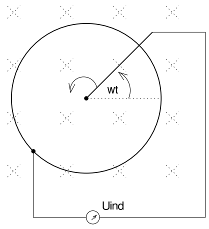
(Benötigte Zeit: 24 min) 14.03.2006

1.2.63 70. und 71. Hausaufgabe

Zusammenfassung der Stunde: Gleichspannungsgenerator

Ein kreisförmiger Leiter befindet sich in einem Magnetfeld. Aufgesetzt ist ein zweiter, geradliniger Leiter, dessen Anfangspunkt der Kreismittelpunkt ist.

Greift man nun die Spannung zwischen einem Punkt des kreisförmigen Leiters und dem Mittelpunkt ab, so wird man – dreht man den aufsitzenden Leiter mit konstanter Winkelgeschwindigkeit – eine konstante Gleichspannung messen können.

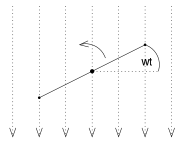


Dies kann mittels des bekannten Induktionsgesetzes gezeigt werden – der Zeiger überstreicht eine Fläche, genauer ein Kreissegment. Diese Fläche kann problemlos berechnet werden, und damit kann man auch den fürs Induktionsgesetz benötigte magnetischen Fluss berechnen:

$U_{\text{ind}}(t) = \dot{\phi}(t) = \mathcal{B}\dot{A}(t) = \mathcal{B}\dot{\left(\frac{\varphi(t)}{2}r^2\right)} = \mathcal{B}\dot{\left(\frac{1}{2}\omega t r^2\right)} = \frac{1}{2}\mathcal{B}\omega r^2;$

Zusammenfassung der Stunde: Wechselspannungsgenerator

Ein rechteckiger Leiter befindet sich in einem Magnetfeld. Die magnetische Flussdichte und die Leiterausmaße sind bekannt; mit den Leiterenden wird ein Verbraucher verbunden. Kann man durch Drehung des Leiters um seine Mittelachse einen Energiefluss gegebener Energiestromstärke erreichen?



Zur Beantwortung dieser Frage ist es zuerst zweckmäßig, die Unterschiede zur vorherigen Aufgabe herauszuarbeiten. Bei beiden Fällen wird ein Leiter gedreht – beim Gleichspannungsgenerator überstreicht der Leiter eine Fläche, beim hier vorliegenden Fall dagegen dreht sich eine orientierte Fläche – die Leiterfläche.

Bekannt ist bereits das Ergebnis dieser Drehung: Es wird Wechselspannung induziert. Kann man aber eine angestrebte Leistung P_{eff} erreichen?

Zur Beantwortung ist es hilfreich, vom einfachen Ansatz $P_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$ auszugehen und dann schrittweise unbekannte Größen durch andere auszudrücken.

$P_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}; \Leftrightarrow R = \frac{U_{\text{eff}}^2}{P_{\text{eff}}} = \left(\frac{\widehat{U_{\text{ind}}(t)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{P_{\text{eff}}} = \left(\frac{\widehat{-n\dot{\phi}(t)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{P_{\text{eff}}} = \left(\frac{n\mathcal{B}\widehat{A_0\omega\sin\omega t}}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{P_{\text{eff}}} = \left(\frac{n\mathcal{B}A_0\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{P_{\text{eff}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{P_{\text{eff}}} n^2\mathcal{B}^2A_0^2\omega^2; \Leftrightarrow f = \frac{\sqrt{2RP_{\text{eff}}}}{nBA_0 2\pi};$ → realistisch nur bei hoher Windungszahl.

Eine gegebene Leistung zu erzielen ist also genau dann möglich, wenn der Verbraucherwiderstand der obigen Gleichung genügt.

Ich möchte besonders hervorheben, dass der Knackpunkt dieser Hausaufgabe nicht im Auflösen der Gleichungen besteht, sondern in den Unterschieden der beiden Szenarien: Beides mal wird ein Leiter mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gedreht, jedoch wird einmal Gleichspannung und einmal Wechselspannung induziert.

(Benötigte Zeit: 74 min) 19.03.2006

1.2.64 72. Hausaufgabe

Formelsammlung über B. S. 262–287

- Drehung einer Spule (Leiterschleife) der Fläche A mit n Windungen in einem homogenen Magnetfeld der magnetischen Flussdichte $\mathcal{B}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω **(S. 261f.)**

  Induktionswechselspannung: $U = n\mathcal{B}A\omega \cdot \sin\omega t;$

- Phasendifferenzen zwischen Strom und Spannung... **(S. 262f.)**
  - ...bei Fluss durch einen OHMschen Widerstand: $\Delta\varphi = 0;$
  - ...bei Fluss durch eine Spule: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2};$ (Strom eilt der Spannung voraus)
  - ...bei Fluss durch einen Kondensator: $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2};$ (Strom eilt der Spannung hinterher)
- Effektivwerte von... **(S. 264, S. 266)**
  - ...Strom und Spannung: $I_{\text{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ bzw. $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}};$
  - ...Leistung: $P_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}U_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\hat{I}\hat{U} = \frac{1}{2}\hat{P};$
- Wechselstromwiderstand... **(S. 264f.)**
  - ...eines OHMschen Widerstands R: R
  - ...einer Spule der Induktivität L: ωL
  - ...einem Kondensator der Kapazität C: $\frac{1}{\omega C}$
- Eigenfrequenz eines elektromagnetischen Schwingkreises der Induktivität L und der Kapazität C **(S. 274)**: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$
- Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Wellen der Frequenz f und der Wellenlänge λ **(S. 282)**: $c = f\lambda;$

Fragen

- Die bisher betrachteten Schwingkreise (elektromagnetischer und verschiedene mechanische) zeigten große Übereinstimmungen und Symmetrien; es konnten immer Analogien zwischen den Modellen hergestellt werden.

  Bei hochfrequenten elektromagnetischen Schwingkreisen scheint diese Symmetrie aber gebrochen: Hochfrequente mechanische Schwingkreise strahlen keine Wellen ab.

  Gibt es eine Möglichkeit, die Symmetrie zu „retten"?
- Wie kommt es zur Abschnürung des elektromagnetischen Felds beim HERZschen Dipol?
- Wieso breiten sich elektromagnetische Wellen immer mit Lichtgeschwindigkeit aus?
- Breiten sich elektromagnetische Wellen auch dann mit Vakuumlichtgeschwindigkeit aus, wenn sie in einem Medium (z.B. die Lichtgeschwindigkeit in Wasser, mit nur $\frac{3}{4}$ der Vakuumgeschwindigkeit)?
- Was passiert an den „Grenzen des Universums" mit elektromagnetischen Wellen? (Ist diese Frage sinnvoll?)
- Wäre die Größe des Universums nicht vernachlässigbar groß, würde dann die durch elektromagnetische Wellen abgestrahlte Energie wieder zum HERZschen Dipol zurückfließen, ähnlich dem besprochenen mechanischen Modell mit einer endlich großen Gummimembran? (Ist diese Frage sinnvoll?)
- Kann man elektromagnetische Wellen abschirmen? (Elektrische Felder sind ja bekanntlich abschirmbar (FARADAYscher Käfig), magnetische jedoch nicht, oder?)
- Wie kann ein Spiegel, der ja keine speziellen elektrischen oder magnetischen Felder aufweist, elektromagnetische Wellen (Licht) reflektieren?

(Benötigte Zeit: 49 min) 21.03.2006

1.2.65 73. Hausaufgabe

Zusammenfassung eines bestimmten Aspekts: Masse ohne Materie!

Während der Diskussion über stehende Wellen beim HERZschen Dipol kam das Thema der Äquivalenz von Masse und Energie – $E = mc^2$ – auf.

Demzufolge besitzen Felder, die je bekanntermaßen über Energie verfügen, auch eine Masse. Den Energieinhalt eines $\mathcal{E}$-oder $\mathcal{B}$Felds zu bestimmen ist kein Problem für uns, die Formeln kennen wir.

Auch ist es uns über die einfache Gleichung $E = mc^2$ möglich, die Masse von Feldern zu berechnen – $m = \frac{E}{c^2}$.

Wie passt aber die Erkenntnis, dass auch Felder über Masse verfügen, mit unseren bisherigen Überlegungen – z.B. das Felder nicht von Materie getragen werden müssen oder dass sich Licht auch im materiefreien Raum ausbreitet – zusammen?

Die Antwort liegt, wie so oft, in Sprachunsauberkeiten. Redet man beispielsweise vom „Beschleunigen von $m = 5\,\mathrm{kg}$“, so meint man eigentlich die Beschleunigung eines Körpers mit dem Attribut „$m = 5\,\mathrm{kg}$“. Masse ist also nicht Materie, sondern nur ein Körperattribut, genau wie Dichte und Volumen.

In der Tat ist Masse nur ein Maß für die Trägheit im Mechanischen, genauso wie Induktivität ein Maß für die elektromagnetische Trägheit ist. Dass man „Induktivität“ aber nicht mit „Spule“ verwechselt, liegt daran, dass der Induktivitätsbegriff von vornherein abstrakt eingeführt wird, ja sogar überhaupt eingeführt wird!

Da weder „Spule“ noch „Induktivität“ Begriffe des Alltags sind, sondern beide erst im Rahmen eines physikalischen Unterrichts erklärt werden, ist ganz klar: Eine Spule hat verschiedene Eigenschaften, beispielsweise die Zahl ihrer Windungen oder ihre Induktivität. Genauso ist es bei Körpern!

Mit der Auflösung der Sprachunsauberkeit löst sich auch das eingangs gestellte Paradox auf: Felder verfügen zwar über eine Masse, jedoch nicht über Materie. Die Existenz von Masse – einem Trägheitsmaß – impliziert nicht die Existenz von Materie.

Interessant ist auch, dass die körperlose Masse sehr wohl eine gravitative Anziehungskraft ausübt – nur ist die Auswirkung dieser

Kraft wegen der Größe der Lichtgeschwindigkeit, welche als Faktor in die Formel der Gravitationskraft eingeht, vernachlässigbar.

Kurz: Masse ist nicht Materie, Materie ist nicht Masse. Masse ist ein Maß für die Trägheit. Massen sind für die Gravitation verantwortlich, nicht Materie.

(Benötigte Zeit: 63 min) 22.03.2006

1.2.66 74. Hausaufgabe

Formeln der Formelsammlung, S. 49–53

- Drehung einer Leiterschleife der Fläche A_0 in einem Magnetfeld der magnetischen Flussdichte $\mathcal{B}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω **(S. 49)**:
  $\phi(t) = \phi_0 \cos\omega t = \mathcal{B}A_0 \cdot \cos\omega t;$
  $U(t) = U_0 \sin\omega t = \mathcal{B}A_0\omega \cdot \sin\omega t;$
- Effektivwerte von… **(S. 49f.)**
  - …Strom und Spannung: $I_{\mathrm{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ bzw. $U_{\mathrm{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$;
  - …Leistung: $P_{\mathrm{eff}} = U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\varphi$, wobei φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom angibt.
- Wechselstromwiderstand… **(S. 49f.)**
  - …allgemein: $R = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$;
    Bei sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$: $I(t) = \hat{I}\sin\omega t;$
  - …einer Spule der Induktivität L: $R = \omega L;$
    Bei sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$: $I(t) = \hat{I}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$
  - …eines Kondensators der Kapazität C: $R = \frac{1}{\omega C}$;
    Bei sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$: $I(t) = \hat{I}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$

- Differentialgleichung der ungedämpften elektromagnetischen Schwingung in einem Schwingkreis der Induktivität L und der Kapazität C **(S. 51)**:
  $\frac{1}{C}Q(t) + L\ddot{Q}(t) = 0\,\mathrm{V};$
  Lösung: $Q(t) = \hat{Q}\sin\omega t;$
  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}};$
- Differentialgleichung der gedämpften elektromagnetischen Schwingung in einem Schwingkreis der Induktivität L und der Kapazität C **(S. 52)**:
  $\frac{1}{C}Q(t) + R\dot{Q}(t) + L\ddot{Q}(t) = 0\,\mathrm{V};$
  Lösung: $Q(t) = \hat{Q}e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega t;$
  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}};$
- Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle im Vakuum **(S. 52)**:
  $\mathcal{E}(x,t) = \hat{\mathcal{E}}\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right);$
  $\mathcal{B}(x,t) = \hat{\mathcal{B}}\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right);$
- Abstand zwischen zwei Knoten oder Bäuchen von elektromagnetischen Wellen der Wellenlänge λ **(S. 53)**:
  $d = \frac{\lambda}{2};$

(Benötigte Zeit: 29 min) 25.10.2005 07.11.2005

1.3 Tests

1.3.1 1. Klausur am 25.10.2005

1. Millikan gelang im Jahr 1916 die Bestimmung des Werts der Elementarladung. (12 P)

   a) Beschreiben und skizzieren Sie kurz den Versuchsaufbau des Öltröpfchenversuchs. Erläutern Sie die Vorgehensweise für den Fall, dass ein Öltröpfchen mit bekanntem Radius und bekannter Dichte im Plattenkondensator schwebt. Leiten Sie eine Formel für die Ladung Q in Abhängigkeit