

Die wundersame Welt der unendlich großen Zahlen

Glaube in der Mathematik?

Weihnachtsvorlesung

21. Dezember 2022



Ingo Blechschmidt

Fragen sind willkommen



Fragen sind während des gesamten Vortrags willkommen.
Bitte keinesfalls bis zum Ende aufsparen.
Vielen Dank dafür! ❤



Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. [page 722 of seq.]

| Number of Operations. | Name of Operations. | Variables acted upon. | Variables receiving results. | Indication of change in the last two Variables. | Data. | | | | | | | | Working Variables. | | | | | | | |
|-----------------------|--|-----------------------|------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--|
| | | | | | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | r_{11} | r_{12} | r_{13} | r_{14} | r_{15} | |
| 1 | $\times V_{11} \times V_{12} V_{13} V_{14} V_{15}$ | $V_{11} = r_1$ | | $-2u$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 2 | $+ V_{12} - V_{11} V_{13}$ | $V_{12} = r_2$ | | $-2u + 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 3 | $+ V_{13} + V_{12} V_{14}$ | $V_{13} = r_3$ | | $-2u + 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | $- V_{14} - V_{13} V_{15}$ | $V_{14} = r_4$ | | $2u - 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 5 | $+ V_{15} + V_{14} V_{11}$ | $V_{15} = r_5$ | | $2u - 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | $- V_{16} + V_{15} V_{12}$ | $V_{16} = r_6$ | | $2' - 2u + 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 7 | $- V_{17} + V_{16} V_{13}$ | $V_{17} = r_7$ | | $2' - 2u + 1 - 3u$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 8 | $+ V_{18} + V_{17} V_{14}$ | $V_{18} = r_8$ | | $2 + 9 - 2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 9 | $+ V_{19} - V_{18} V_{15}$ | $V_{19} = r_9$ | | $2 - 3u$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | $\times V_{20} \times V_{21} V_{22} V_{23} V_{24}$ | $V_{20} = r_{10}$ | | $B_1 - \frac{2}{3} = B_1 A_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | $+ V_{21} + V_{20} V_{22}$ | $V_{21} = r_{11}$ | | $1 - \frac{2}{3} = 1 + B_1 - \frac{2}{3}u$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | $- V_{22} + V_{21} V_{23}$ | $V_{22} = r_{12}$ | | $1 - 2 + 2u + 1 = B_1 - \frac{2}{3}u$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 13 | $+ V_{23} + V_{22} V_{24}$ | $V_{23} = r_{13}$ | | $1 - 2 + 3(-1) = B_1 - \frac{2}{3}u$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | $- V_{24} - V_{23} V_{21}$ | $V_{24} = r_{14}$ | | $2 + 1 - 3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 15 | $+ V_{25} + V_{24} V_{22}$ | $V_{25} = r_{15}$ | | $2 + 1 - 3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | $- V_{26} - V_{25} V_{23}$ | $V_{26} = r_{16}$ | | $2 + 2 - 3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | $+ V_{27} + V_{26} V_{24}$ | $V_{27} = r_{17}$ | | $2 + 2 - 3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | $- V_{28} - V_{27} V_{25}$ | $V_{28} = r_{18}$ | | $2 + 2 - 3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | $+ V_{29} + V_{28} V_{26}$ | $V_{29} = r_{19}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 20 | $- V_{30} - V_{29} V_{27}$ | $V_{30} = r_{20}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 21 | $+ V_{31} + V_{30} V_{28}$ | $V_{31} = r_{21}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | $- V_{32} + V_{31} V_{29}$ | $V_{32} = r_{22}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 23 | $+ V_{33} + V_{32} V_{31}$ | $V_{33} = r_{23}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 24 | $- V_{34} - V_{33} V_{32}$ | $V_{34} = r_{24}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | $+ V_{35} + V_{34} V_{33}$ | $V_{35} = r_{25}$ | | $2 + 2 - 3 - 4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Here follows a repetition of Operations shown in twenty-five.

Ada Lovelace,

die erste programmierende Person der Welt

* 1815 † 1852

Teil 0

Große Zahlen

300 000 Augsburger*innen

Teil 0

Große Zahlen

300 000 Augsburger*innen

$10^{19} = \underbrace{10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{19 \text{ Nullen}}$ Sandkörner auf der Erde

Teil 0

Große Zahlen

300 000 Augsburger*innen

$10^{19} = \underbrace{10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{19 \text{ Nullen}}$ Sandkörner auf der Erde

$10^{80} = \underbrace{1000\dots000}_{80 \text{ Nullen}}$ Elementarteilchen im Universum



A wide-angle photograph of a dark night sky. The upper two-thirds of the image are filled with numerous stars of varying brightness, creating a dense field of light. A prominent, faint band of light, characteristic of the Milky Way, stretches across the center of the frame. The lower third of the image features the dark, silhouetted outlines of a forest of tall evergreen trees, their branches reaching upwards. The overall composition is a landscape-oriented night scene.

6 000 Sterne



A wide-angle photograph of a coastal scene at sunset. The sky is filled with vibrant orange, red, and yellow clouds. In the foreground, dark silhouettes of large rock formations stand in the water. The ocean waves are visible, reflecting the warm colors of the sky.

52! = 80 658 175 170 943 878 571 660
636 856 403 766 975 289 505 440
883 277 824 000 000 000 000 Sekunden

Teil I

Ordinalzahlen messen Anordnung



Teil II

Kardinalzahlen messen Anzahl



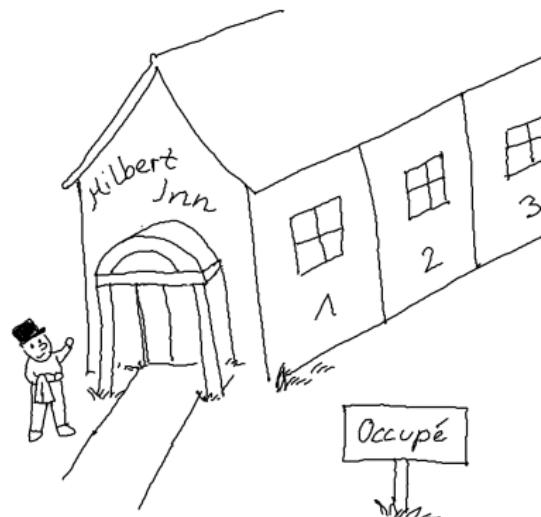
David Hilbert
* 1862
† 1943



Emmy Noether
* 1882
† 1935

Teil II

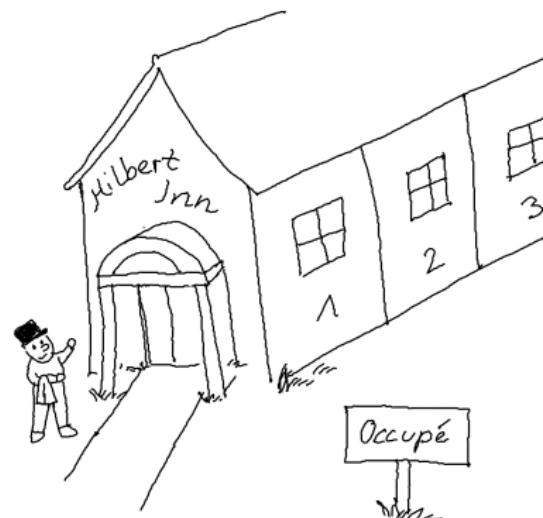
Kardinalzahlen messen Anzahl



Teil II

Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt \aleph_0 viele natürliche
Zahlen: 1, 2, 3, ...

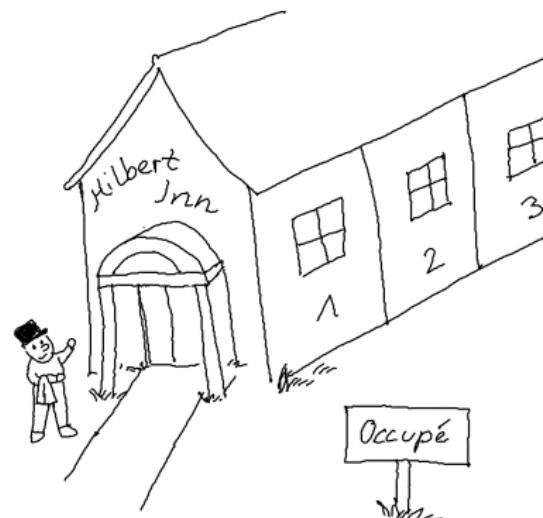


Teil II

Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt \aleph_0 viele natürliche
Zahlen: 1, 2, 3, ...

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$



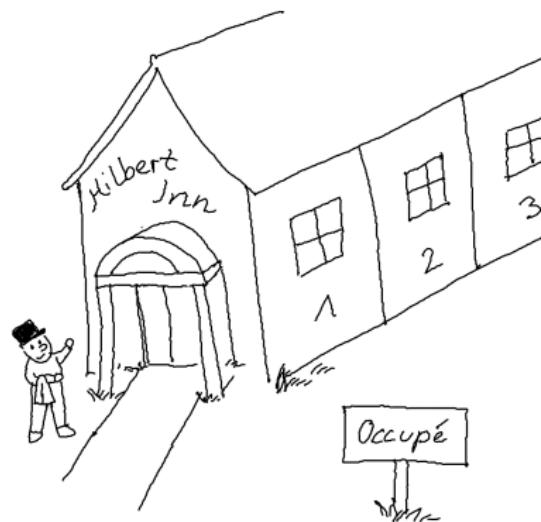
Teil II

Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt \aleph_0 viele natürliche Zahlen: 1, 2, 3, ...

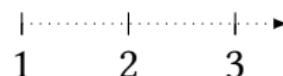
$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$



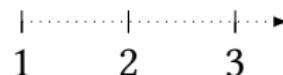
Größen wichtiger Mengen

- Es gibt \aleph_0 viele **natürliche Zahlen**.

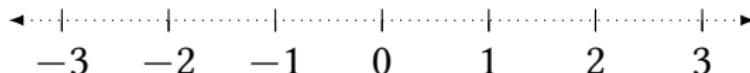


Größen wichtiger Mengen

- Es gibt \aleph_0 viele **natürliche Zahlen**.

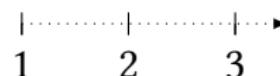


- Es gibt auch nur \aleph_0 viele **ganze Zahlen**.

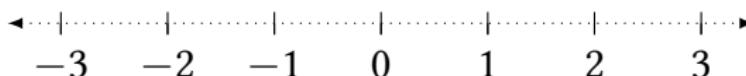


Größen wichtiger Mengen

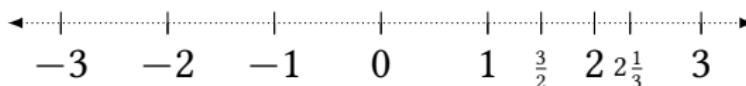
- Es gibt \aleph_0 viele **natürliche Zahlen**.



- Es gibt auch nur \aleph_0 viele **ganze Zahlen**.



- Ebenso gibt es nur \aleph_0 viele **rationale Zahlen**.

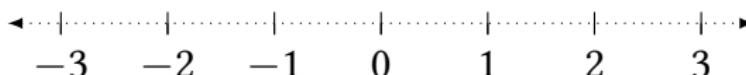


Größen wichtiger Mengen

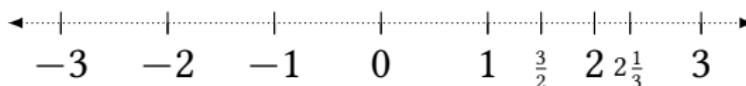
- Es gibt \aleph_0 viele **natürliche Zahlen**.



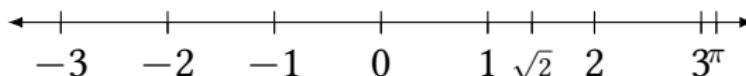
- Es gibt auch nur \aleph_0 viele **ganze Zahlen**.



- Ebenso gibt es nur \aleph_0 viele **rationale Zahlen**.

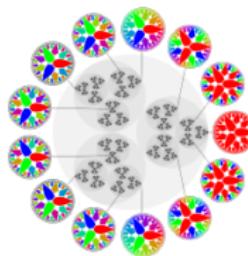


- Aber es gibt **mehr** reelle Zahlen: \mathfrak{c} viele.



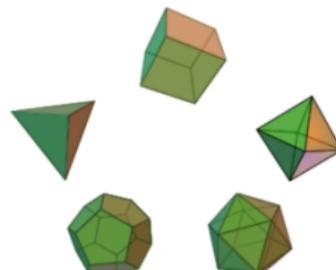
Teil III

Erkenntnistheorie



„Es gibt unendlich
viele Primzahlen.“

„Es gibt nur fünf
platonische Körper.“



„Der goldene Schnitt ist
eine irrationale Zahl.“

Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \aleph_0 und \mathfrak{c} ?

Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

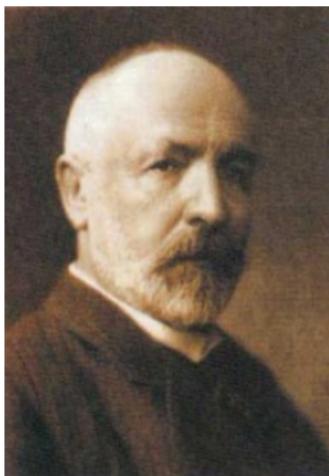


Kurt Gödel (* 1906, † 1978)

Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \aleph_0 und \mathfrak{c} ?

Es gibt keinen
Beweis, dass es eine
Zwischenstufe gibt.

Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)



Kurt Gödel (* 1906, † 1978)



Paul Cohen (* 1934, † 2007)

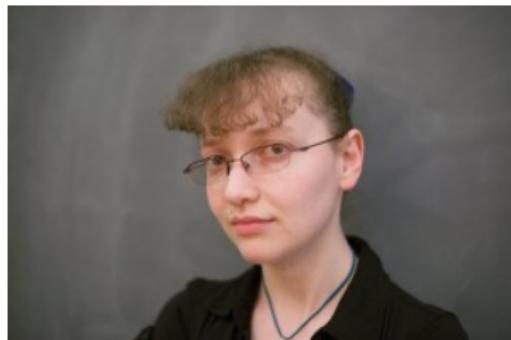
Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \aleph_0 und \mathfrak{c} ?

Es gibt keinen
Beweis, dass es eine
Zwischenstufe gibt.

Es gibt keinen
Beweis, dass es keine
Zwischenstufe gibt.

Abschluss

- Ordinalzahlen messen Anordnung. $\omega + 1 > \omega$
- Kardinalzahlen messen Anzahl. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
- Es gibt mathematische Fragen, deren Antwort bewiesenermaßen dauerhaft unkennbar ist.



Pionierarbeit auf diesem Gebiet leistet die
Mathematikerin Victoria Gitman.