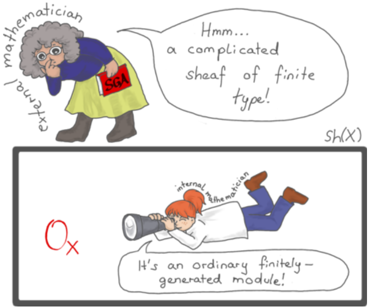


Anwendungen der internen Sprache von Topoi in der algebraischen Geometrie

Ingo Blechschmidt

Dissertationsprüfung am
16. Oktober 2017

Was ist ein Topos?

Formale Definition

Ein **Topos** ist eine kartesisch abgeschlossene Kategorie, die alle endliche Limiten und einen Unterobjektklassifizierer besitzt.

Motto

Ein Topos ist eine Kategorie, die hinreichend reich ist, um eine **interne Sprache** zu erlauben.

Beispiele

- **Set:** die Kategorie der Mengen
- **Sh(X):** die Kategorie der Garben auf einem Raum X
- **Zar(S):** der große Zariskitopos eines Basisschemas S

Was ist die interne Sprache?

Die interne Sprache eines Topos $\mathcal{E}$ erlaubt es, in einer **naiven Element-basierten Sprache**

1. Objekte und Morphismen des Topos zu konstruieren,
2. Aussagen über diese zu formulieren und
3. solche Aussagen zu beweisen.

extern	intern in $\mathcal{E}$
Objekt von $\mathcal{E}$	Menge
Morphismus in $\mathcal{E}$	Abbildung zwischen Mengen
Monomorphismus	injektive Abbildung
Epimorphismus	surjektive Abbildung
Gruppenobjekt	Gruppe

Die interne Sprache von $\mathrm{Sh}(X)$

Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir rekursiv

$$U \models \varphi \quad (\text{„}\varphi \text{ gilt auf } U\text{“})$$

für offene Teilmengen $U \subseteq X$ und Formeln φ.

Die interne Sprache von $\mathrm{Sh}(X)$

Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir rekursiv

$$U \models \varphi \quad („\varphi \text{ gilt auf } U“)$$

für offene Teilmengen $U \subseteq X$ und Formeln φ.

$$\begin{aligned}
U &\models f = g : \mathcal{F} &&:\Longleftrightarrow f|_U = g|_U \in \mathcal{F}(U) \\
U &\models \varphi \wedge \psi &&:\Longleftrightarrow U \models \varphi \text{ und } U \models \psi \\
U &\models \varphi \vee \psi &&:\Longleftrightarrow \cancel{U \models \varphi \text{ oder } U \models \psi} \\
& && \quad\ \text{es gibt eine Überdeckung } U = \textstyle\bigcup_i U_i \text{ sd. für alle } i\text{:} \\
& && \qquad\quad U_i \models \varphi \text{ oder } U_i \models \psi \\
U &\models \varphi \Rightarrow \psi &&:\Longleftrightarrow \text{für alle Offenen } V \subseteq U\text{: } V \models \varphi \text{ impliziert } V \models \psi \\
U &\models \forall f : \mathcal{F}.\, \varphi(f) &&:\Longleftrightarrow \text{für alle Schnitte } f \in \mathcal{F}(V) \text{ auf } V \subseteq U\text{: } V \models \varphi(f) \\
U &\models \exists f : \mathcal{F}.\, \varphi(f) &&:\Longleftrightarrow \text{es gibt eine Überdeckung } U = \textstyle\bigcup_i U_i \text{ sd. für alle } i \\
& && \qquad\quad f_i \in \mathcal{F}(U_i) \text{ mit } U_i \models \varphi(f_i) \text{ existiert}
\end{aligned}$$

Die interne Sprache von $\mathrm{Sh}(X)$

Lokalität

Falls $U = \bigcup_i U_i$, dann $U \models \varphi$ genau dann, falls $U_i \models \varphi$ für alle i.

Korrektheit

Falls $U \models \varphi$ und falls φ konstruktiv ψ impliziert, dann $U \models \psi$.

Die interne Sprache von $\mathrm{Sh}(X)$

Lokalität

Falls $U = \bigcup_i U_i$, dann $U \models \varphi$ genau dann, falls $U_i \models \varphi$ für alle i.

Korrektheit

Falls $U \models \varphi$ und falls φ konstruktiv ψ impliziert, dann $U \models \psi$.

kein $\varphi \vee \neg\varphi$, kein $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$, kein Auswahlaxiom

Die interne Sprache von $\mathrm{Sh}(X)$

Lokalität

Falls $U = \bigcup_i U_i$, dann $U \models \varphi$ genau dann, falls $U_i \models \varphi$ für alle i.

Korrektheit

Falls $U \models \varphi$ und falls φ konstruktiv ψ impliziert, dann $U \models \psi$.

kein $\varphi \vee \neg\varphi$, kein $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$, kein Auswahlaxiom

Ein erster Eindruck der konstruktiven Natur

- $U \models f = 0$ genau dann, falls $f|_U = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
- $U \models \neg\neg(f = 0)$ genau dann, falls $f = 0$ auf einer dichten offenen Teilmenge von U.

Der kleine Zariskitopos

Definition

Der **kleine Zariskitopos** eines Schemas X ist die Kategorie $\mathrm{Sh}(X)$ der mengenwertigen Garben auf X.

Aus interner Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ …

- sieht die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ wie ein **gewöhnlicher Ring** und
- eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln wie ein **gewöhnlicher Modul** über diesem Ring aus.

Several Topos theory ×

mathoverflow.net/questions/2314/several-topos-theory-questions

StackExchange sign up log in tour help

mathoverflow Questions Tags Users Badges Unanswered

Several Topos theory questions

29

20

Hey. I have a few off the wall questions about topos theory and algebraic geometry.

1. Do the following few sentences make sense?

Every scheme X is pinned down by its Hom functor Hom(-,X) by the yoneda lemma, but since schemes are locally affine varieties, it is actually just enough to look at the case where "-" is an affine scheme. So you could define schemes as particular functors from CommRing^op to Sets. In this setting schemes are thought of as sheaves on the "big zariski site".

If that doesn't make sense my next questions probably do not either.

2 The category of sheaves on the big zariski site forms a topos T, the category of schemes being a subcategory. It is convenient to reason about toposes in their own "internal logic". Has there been much thought done about the internal logic of T, or would the logic of T require too much commutative algebra to feel like logic? Along these lines, have there been attempts to write down an elementary list of axioms which capture the essense of this topos? I am thinking of how Anders Kock has some really nice ways to think of differential geometry with his SDG.

ct.category-theory topos-theory lo.logic ag.algebraic-geometry

share cite improve this question

edited Oct 24 '09 at 17:53
Ben Webster ♦
25.3k ● 4 ● 73 ● 167

asked Oct 24 '09 at 16:49
Steven Gubkin
6,003 ● 2 ● 47 ● 87

Entwicklung eines Wörterbuchs

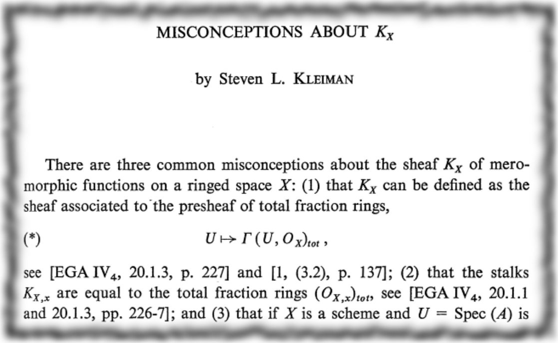
Verstehe Konzepte aus der algebraischen Geometrie als Konzepte aus der Algebra in der internen Welt von $\mathrm{Sh}(X)$.

extern	intern in $\mathrm{Sh}(X)$
Garbe von Mengen	Mengen
Morphismus von Garben	Abbildung zwischen Mengen
Monomorphismus	injektive Abbildung
Epimorphismus	surjektive Abbildung
Garbe von Ringen	Ring
Garbe von Moduln	Modul
Garbe von endlichem Typ	endlich erzeugter Modul
lokal endlich freie Garbe	endlich freier Modul
Tensorprodukt von Garben	Tensorprodukt von Moduln
Garbe der Differentialformen	Modul der Kählerdifferentiale
Dimension von X	Krulldimension von $\mathcal{O}_X$

Entwicklung eines Wörterbuchs

Verstehe Konzepte aus der algebraischen Geometrie als Konzepte aus der Algebra in der internen Welt von $\mathrm{Sh}(X)$.

extern	intern in $\mathrm{Sh}(X)$
Garbe	
Morph	gen
Monor	
Epimo	
Garbe	
Garbe	
Garbe	
lokal e	
Tenso	n
Garbe der Differentialformen	Modul der Kählerdifferentiale
Dimension von X	Krulldimension von $\mathcal{O}_X$



MISCONCEPTIONS ABOUT K_X

by Steven L. KLEIMAN

There are three common misconceptions about the sheaf K_X of meromorphic functions on a ringed space X: (1) that K_X can be defined as the sheaf associated to the presheaf of total fraction rings,

(*) $$U \mapsto \Gamma(U, O_X)_{tot},$$

see [EGA IV$_4$, 20.1.3, p. 227] and [1, (3.2), p. 137]; (2) that the stalks $K_{X,x}$ are equal to the total fraction rings $(O_{X,x})_{tot}$, see [EGA IV$_4$, 20.1.1 and 20.1.3, pp. 226-7]; and (3) that if X is a scheme and $U = \mathrm{Spec}\,(A)$ is

Anwendungen des Wörterbuchs

Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln. Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M.

$$\Downarrow$$

Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ von endlichem Typ, so auch $\mathcal{F}$.

Anwendungen des Wörterbuchs

Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln. Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M.

$$\Downarrow$$

Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ von endlichem Typ, so auch $\mathcal{F}$.

Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt *nicht nicht* eine Basis.

$$\Downarrow$$

Jede Modulgarbe von endlichem Typ auf einem reduzierten Schema ist *auf einer dichten offenen Teilmenge* lokal frei.

Ravi Vakil: „Important hard exercise“ (13.7.K).

Mehr zum kleinen Zariskitopos

Verstehe Konzepte und Sätze der **algebraischen Geometrie** als Konzepte und Sätze der (konstruktiven) **kommutativen Algebra** in der internen Welt des **kleinen Zariskitopos**.

- Transferprinzipien $M \leftrightarrow M^\sim$
- Besondere Eigenschaften der internen Welt
- Interne Charakterisierung von Quasikohärenz
- Logische Deutung von Ausbreitungsphänomenen
- Interne Konstruktion des relativen Spektrums
- Interner Beweis von Grothendiecks Lemma über generische Freiheit

Transferprinzipien

Theorem

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ erbt all solche Eigenschaften erster Ordnung von A, die stabil unter Lokalisierung sind.

Beweis. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ist die Lokalisierung

$$\underline{A}[\mathcal{F}^{-1}]$$

der konstanten Garbe $\underline{A}$ am **generischen Filter** $\mathcal{F}$, einer Garbe mit $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$. Die Ringe A und $\underline{A}$ haben die gleichen Eigenschaften erster Ordnung.

Bemerkung. Die analoge Aussage gilt für A-Moduln M und ihre Spiegelbilder $M^{\sim} = \underline{M}[\mathcal{F}^{-1}]$.

Besonderheiten der internen Welt

Sei X ein Schema. Intern in $\mathrm{Sh}(X)$ gilt:

Jedes nicht-invertierbare Element von $\mathcal{O}_X$ ist nilpotent.

> ON THE SPECTRUM OF A RINGED TOPOS **209**
>
> For completeness, two further remarks should be added to this treatment of the spectrum. One is that in $\mathbf{E}$ the canonical map $A \to \Gamma_*(LA)$ is an isomorphism—i.e., the representation of A in the ring of "global sections" of LA is complete. The second, due to Mulvey in the case $\mathbf{E} = \mathbf{S}$, is that in $\mathrm{Spec}(\mathbf{E}, A)$ the formula
>
> $$\neg(x \in U(LA)) \Rightarrow \exists n(x^n = 0)$$
>
> is valid. This is surely important, though its precise significance is still somewhat obscure—as is the case with many such nongeometric formulas. In any case, calculations such as these are easier from the point of view of the Heyting algebra of radical ideals of A, and hence will be omitted here.

Miles Tierney. On the spectrum of a ringed topos. 1976.

Besonderheiten der internen Welt

Sei X ein Schema. Intern in $\mathrm{Sh}(X)$ gilt:

Jedes nicht-invertierbare Element von $\mathcal{O}_X$ ist nilpotent.

Ist X reduziert, so folgt daraus für die interne Welt:

- $\mathcal{O}_X$ ist ein **Körper**: Nichteinheiten sind Null.
- $\mathcal{O}_X$ hat **$\neg\neg$-stabile Gleichheit**: $\neg\neg(x = 0) \Rightarrow x = 0$.
- $\mathcal{O}_X$ is **anonym noethersch**: Jedes Ideal von $\mathcal{O}_X$ ist **nicht nicht** endlich erzeugt.

Generische Freiheit

Sei A ein reduzierter Ring und seien B, M wie folgt:
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dash, "\text{endlich erzeugt}"'] \\ A \arrow[r, "\text{veT}"'] & B \end{tikzcd}$$

Theorem. Ist $1 \neq 0$ in A, so gibt es $f \neq 0$ in A sodass

1. $B[f^{-1}]$ und $M[f^{-1}]$ als Moduln über $A[f^{-1}]$ frei sind,
2. $A[f^{-1}] \to B[f^{-1}]$ von endlicher Präsentation ist und
3. $M[f^{-1}]$ als Modul über $B[f^{-1}]$ endlich präsentiert ist.

Generische Freiheit

Sei A ein reduzierter Ring und seien B, M wie folgt:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dash, "\text{endlich erzeugt}"'] \\ A \arrow[r, "\text{veT}"'] & B \end{tikzcd}$$

Theorem. Ist $1 \neq 0$ in A, so gibt es $f \neq 0$ in A sodass

1. $B[f^{-1}]$ und $M[f^{-1}]$ als Moduln über $A[f^{-1}]$ frei sind,
2. $A[f^{-1}] \to B[f^{-1}]$ von endlicher Präsentation ist und
3. $M[f^{-1}]$ als Modul über $B[f^{-1}]$ endlich präsentiert ist.

Konstruktive Version. Ist Null das einzige Element $f \in A$ mit 1, 2 und 3, so $1 = 0 \in A$.

Generische Freiheit

Sei A ein reduzierter Ring und seien B, M wie folgt:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dash, "\text{endlich erzeugt}"'] \\ A \arrow[r, "\text{veT}"'] & B \end{tikzcd}$$

Theorem. Ist $1 \neq 0$ in A, so gibt es $f \neq 0$ in A sodass

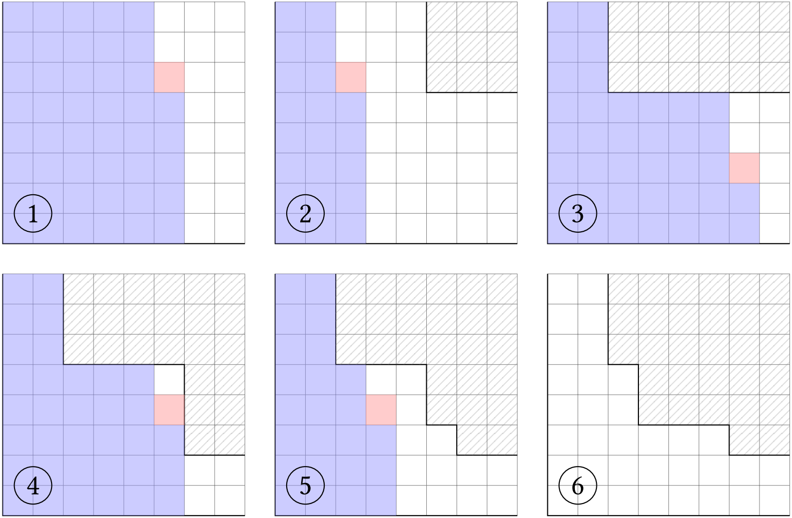
1. $B[f^{-1}]$ und $M[f^{-1}]$ als Moduln über $A[f^{-1}]$ frei sind,
2. $A[f^{-1}] \to B[f^{-1}]$ von endlicher Präsentation ist und
3. $M[f^{-1}]$ als Modul über $B[f^{-1}]$ endlich präsentiert ist.

Konstruktive Version. Ist Null das einzige Element $f \in A$ mit 1, 2 und 3, so $1 = 0 \in A$.

Beweis. Die Behauptung ist die Übersetzung des trivialen Fakts, dass intern in $\mathrm{Sh}(\mathrm{Spec}(A))$ es **nicht nicht** der Fall ist, dass

1. $B^\sim$ und $M^\sim$ als Moduln über $A^\sim$ frei sind,
2. $A^\sim \to B^\sim$ von endlicher Präsentation ist und
3. $M^\sim$ als Modul über $B^\sim$ endlich präsentiert ist.

Sei $B^\sim$ als $A^\sim$-Modul von $(x^i y^j)_{i,j\geq 0}$ erzeugt. Es ist **nicht nicht** der Fall, dass entweder ein Erzeuger als Linearkombination von Erzeugern mit kleinerem Index ausgedrückt werden kann, oder nicht.



Synthetische algebraische Geometrie

Üblicher Zugang zur Schematheorie: **Entwickle Schematheorie über gewöhnlicher Mengenlehre** mit

- lokal geringten Räumen oder

$$\text{Menge der Primideale von } \mathbb{Z}[X,Y,Z]/(X^n+Y^n-Z^n) + \text{Zariskitopologie} + \text{Strukturgarbe}$$

- Grothendiecks Punktefunktoransatz, bei dem ein Schema ein Funktor Ring $\to$ Set ist.

$$A \longmapsto \{(x,y,z) : A^3 \mid x^n + y^n - z^n = 0\}$$

Synthetische algebraische Geometrie

Üblicher Zugang zur Schematheorie: **Entwickle Schematheorie über gewöhnlicher Mengenlehre** mit

- lokal geringten Räumen oder

$$\text{Menge der Primideale von } \mathbb{Z}[X,Y,Z]/(X^n+Y^n-Z^n) + \text{Zariskitopologie} + \text{Strukturgarbe}$$

- Grothendiecks Punktefunktoransatz, bei dem ein Schema ein Funktor Ring $\to$ Set ist.

$$A \longmapsto \{(x,y,z) : A^3 \mid x^n + y^n - z^n = 0\}$$

Synthetischer Zugang: Modelliere Schemata **direkt als Mengen** in einer nichtklassischen Mengentheorie.

$$\{(x,y,z) : (\underline{\mathbb{A}}^1)^3 \mid x^n + y^n - z^n = 0\}$$

Der große Zariskitopos

Definition

Der **große Zariskitopos** $\mathrm{Zar}(S)$ eines Schemas S ist die Kategorie $\mathrm{Sh}(\mathrm{Aff}/S)$ derjenigen Funktoren $(\mathrm{Aff}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, die die Verklebebedingung erfüllen: Für jedes affine Schema $U = \bigcup_i U_i$ über S soll

$$F(U) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{j,k} F(U_j \cap U_k)$$

ein Limesdiagramm sein.

- Der Punktefunktor $\underline{X} = \mathrm{Hom}_S(\cdot, X)$ eines S-Schemas X ist ein Objekt von $\mathrm{Zar}(S)$. „Die **Menge der Punkte** von X."
- In der internen Welt ist $\underline{\mathbb{A}}^1$ ein Körper:

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall x : \underline{\mathbb{A}}^1.\, x \neq 0 \Longrightarrow x \text{ invertierbar}$$

Synthetische Konstruktionen

- $\mathbb{P}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) : (\underline{\mathbb{A}}^1)^{n+1} \mid x_0 \neq 0 \vee \cdots \vee x_n \neq 0\}/(\underline{\mathbb{A}}^1)^\times$
  $\cong$ Menge der eindimensionalen UVR von $(\underline{\mathbb{A}}^1)^{n+1}$.
  - $\mathcal{O}(1) = (\ell^\vee)_{\ell:\mathbb{P}^n}$
  - $\mathcal{O}(-1) = (\ell)_{\ell:\mathbb{P}^n}$
  - Eulersequenz: $0 \to \ell^\perp \to ((\underline{\mathbb{A}}^1)^{n+1})^\vee \to \ell^\vee \to 0$

- $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}(\underline{\mathbb{A}}^1)}(R, \underline{\mathbb{A}}^1)$
  $=$ Menge der $\underline{\mathbb{A}}^1$-wertigen Punkte von R.
  - $\operatorname{Spec} \underline{\mathbb{A}}^1[X, Y, Z]/(X^n + Y^n - Z^n) \cong$
    $\{(x, y, z) : (\underline{\mathbb{A}}^1)^3 \mid x^n + y^n - z^n = 0\}$
  - $\Delta := \operatorname{Spec} \underline{\mathbb{A}}^1[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \cong \{\varepsilon : \underline{\mathbb{A}}^1 \mid \varepsilon^2 = 0\}$

- $TX = \operatorname{Hom}(\Delta, X)$.

Formulierung von Eigenschaften

Definition

Ein $\underline{\mathbb{A}}^1$-Modul E ist genau dann **synthetisch quasikohärent**, wenn

$$E \otimes_{\underline{\mathbb{A}}^1} R \longrightarrow E^{\operatorname{Spec} R}$$

für alle endlich präsentierten $\underline{\mathbb{A}}^1$-Algebren R ein Isomorphismus ist. (Dabei $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Alg}(\underline{\mathbb{A}}^1)}(R, \underline{\mathbb{A}}^1)$.)

- Aus der synthetischen Quasikohärenz von $\underline{\mathbb{A}}^1$ folgt: Jede Abbildung $\underline{\mathbb{A}}^1 \to \underline{\mathbb{A}}^1$ ist polynomiell.
- Offene und abgeschlossene Immersionen, quasikompakte und quasiseparierte Morphismen, synthetische Schemata, eigentliche Morphismen, …
- Charakterisierung von wichtigen Untertopoi wie dem **étalen Topos** oder dem **fppf-Topos**

Offene Fragen

- Wie geht Kohomologie in der internen Welt wirklich?
- Welche Theorien klassifizieren relevante Untertopoi?
- Welche Anwendungen liefern andere Topologien?
- Was ist der Bezug zu den dynamischen Methoden der Algebra?
- Wie sollte synthetische algebraische Geometrie weiter entwickelt werden?

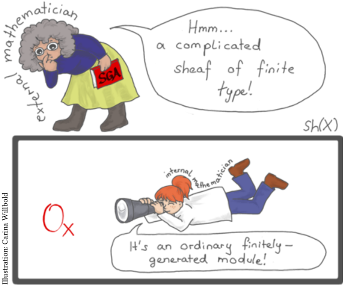


Illustration: Carina Willbold

Spreading from points to neighbourhoods

All of the following lemmas have a short, sometimes trivial proof. Let $\mathcal{F}$ be a sheaf of finite type on a ringed space X. Let $x \in X$. Let $A \subseteq X$ be a closed subset. Then:

1. $\mathcal{F}_x = 0$ iff $\mathcal{F}|_U = 0$ for some open neighbourhood of x.
2. $\mathcal{F}|_A = 0$ iff $\mathcal{F}|_U = 0$ for some open set containing A.
3. $\mathcal{F}_x$ can be generated by n elements iff this is true on some open neighbourhood of x.
4. $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ if $\mathcal{F}$ is of finite presentation around x.
5. $\mathcal{F}$ is torsion iff $\mathcal{F}_\xi$ vanishes (assume X integral and $\mathcal{F}$ quasicoherent).

Quasicoherence

Let X be a scheme. Let $\mathcal{E}$ be an $\mathcal{O}_X$-module.

Then $\mathcal{E}$ is quasicoherent if and only if, internally to $\mathrm{Sh}(X)$,

$$\mathcal{E}[f^{-1}] \text{ is a } \Box_f\text{-sheaf for any } f : \mathcal{O}_X,$$
$$\text{where } \Box_f \varphi :\equiv (f \text{ invertible} \Rightarrow \varphi).$$

Quasicoherence

Let X be a scheme. Let $\mathcal{E}$ be an $\mathcal{O}_X$-module.

Then $\mathcal{E}$ is quasicoherent if and only if, internally to $\mathrm{Sh}(X)$,

$$\mathcal{E}[f^{-1}] \text{ is a } \Box_f\text{-sheaf for any } f : \mathcal{O}_X,$$
$$\text{where } \Box_f \varphi :\equiv (f \text{ invertible} \Rightarrow \varphi).$$

In particular: If $\mathcal{E}$ is quasicoherent, then internally

$$(f \text{ invertible} \Rightarrow s = 0) \Longrightarrow \bigvee_{n \geq 0} f^n s = 0$$

for any $f : \mathcal{O}_X$ and $s : \mathcal{E}$.

The $\Box$-translation

Let $\mathcal{E}_\Box \hookrightarrow \mathcal{E}$ be a subtopos given by a local operator. Then

$$\mathcal{E}_\Box \models \varphi \qquad \text{iff} \qquad \mathcal{E} \models \varphi^\Box,$$

where the translation $\varphi \mapsto \varphi^\Box$ is given by:

$$\begin{aligned}
(s = t)^\Box &:\equiv \Box(s = t) \\
(\varphi \wedge \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \wedge \psi^\Box) \\
(\varphi \vee \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \vee \psi^\Box) \\
(\varphi \Rightarrow \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \Rightarrow \psi^\Box) \\
(\forall x : X.\, \varphi(x))^\Box &:\equiv \Box(\forall x : X.\, \varphi^\Box(x)) \\
(\exists x : X.\, \varphi(x))^\Box &:\equiv \Box(\exists x : X.\, \varphi^\Box(x))
\end{aligned}$$

The $\Box$-translation

Let $\mathcal{E}_\Box \hookrightarrow \mathcal{E}$ be a subtopos given by a local operator. Then

$$\mathcal{E}_\Box \models \varphi \qquad \text{iff} \qquad \mathcal{E} \models \varphi^\Box.$$

Let X be a scheme. Depending on $\Box$, $\mathrm{Sh}(X) \models \Box\varphi$ means that φ holds on …

- … a dense open subset.
- … a schematically dense open subset.
- … a given open subset U.
- … an open subset containing a given closed subset A.
- … an open neighbourhood of a given point $x \in X$.

Can tackle the question "$\varphi^\Box \overset{?}{\Rightarrow} \Box\varphi$" logically.

The absolute spectrum, internalised

Let A be a commutative ring in a topos $\mathcal{E}$.

To construct the **free local ring** over A, give a constructive account of the spectrum:

$$\operatorname{Spec} A := \text{topological space of the prime ideals of } A$$

The absolute spectrum, internalised

Let A be a commutative ring in a topos $\mathcal{E}$.

To construct the **free local ring** over A, give a constructive account of the spectrum:

$$\operatorname{Spec} A := \cancel{\text{topological space of the prime ideals of } A}$$

The absolute spectrum, internalised

Let A be a commutative ring in a topos $\mathcal{E}$.

To construct the **free local ring** over A, give a constructive account of the spectrum:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A &:= \cancel{\text{topological space of the prime ideals of } A} \\ &:= \text{topological space of the prime filters of } A \end{aligned}$$

The absolute spectrum, internalised

Let A be a commutative ring in a topos $\mathcal{E}$.

To construct the **free local ring** over A, give a constructive account of the spectrum:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A &:= \cancel{\text{topological space of the prime ideals of } A} \\ &:= \cancel{\text{topological space of the prime filters of } A} \end{aligned}$$

The absolute spectrum, internalised

Let A be a commutative ring in a topos $\mathcal{E}$.

To construct the **free local ring** over A, give a constructive account of the spectrum:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A &:= \cancel{\text{topological space of the prime ideals of } A} \\ &:= \cancel{\text{topological space of the prime filters of } A} \\ &:= \text{locale of the prime filters of } A \end{aligned}$$

The frame of opens of Spec A is the frame of radical ideals in A. Universal property:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{LRT}/|\mathcal{E}|}(T, \operatorname{Spec} A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}(\mathcal{E})}(A, \mu_* \mathcal{O}_T)$$

for all locally ringed toposes T equipped with a geometric morphism $T \xrightarrow{\mu} \mathcal{E}$.

The relative spectrum

Let X be a scheme and $\mathcal{A}$ be a quasicoherent $\mathcal{O}_X$-algebra. Can we describe its **relative spectrum** $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A} \to X$ internally?

Desired universal property:

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{LRL}/X}(T, \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{A}, \mu_*\mathcal{O}_T)$$

for all locally ringed locales T over X.

The relative spectrum

Let X be a scheme and $\mathcal{A}$ be a quasicoherent $\mathcal{O}_X$-algebra. Can we describe its **relative spectrum** $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A} \to X$ internally?

Desired universal property:

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{LRL}/X}(T, \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{A}, \mu_* \mathcal{O}_T)$$

for all locally ringed locales T over X.

Beware of believing false statements

- $\operatorname{Spec}_X \mathcal{O}_X = X$.
- $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$ is the one-point locale iff every element of $\mathcal{A}$ is invertible or nilpotent.
- Every element of $\mathcal{O}_X$ which is not invertible is nilpotent.
- Thus cannot prove $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X = \mathrm{pt}$ internally.

The relative spectrum

Let X be a scheme and $\mathcal{A}$ be a quasicoherent $\mathcal{O}_X$-algebra. Can we describe its **relative spectrum** $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A} \to X$ internally?

Desired universal property:

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{LRL}/X}(T, \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{A}, \mu_* \mathcal{O}_T)$$

for all locally ringed locales T over X.

Solution: Define internally the frame of $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A}$ to be the frame of those radical ideals $I \subseteq \mathcal{A}$ such that

$$\forall f : \mathcal{O}_X. \forall s : \mathcal{A}. (f \text{ invertible in } \mathcal{O}_X \Rightarrow s \in I) \Longrightarrow fs \in I.$$

The relative spectrum

Let X be a scheme and $\mathcal{A}$ be a quasicoherent $\mathcal{O}_X$-algebra. Can we describe its **relative spectrum** $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A} \to X$ internally?

Desired universal property:

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{LRL}/X}(T, \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{A}, \mu_* \mathcal{O}_T)$$

for all locally ringed locales T over X.

Solution: Define internally the frame of $\operatorname{Spec}_X \mathcal{A}$ to be the frame of those radical ideals $I \subseteq \mathcal{A}$ such that

$$\forall f : \mathcal{O}_X.\, \forall s : \mathcal{A}.\, (f \text{ invertible in } \mathcal{O}_X \Rightarrow s \in I) \Longrightarrow fs \in I.$$

Its **points** are those prime filters G of $\mathcal{A}$ such that

$$\forall f : \mathcal{O}_X.\, \varphi(f) \in G \Longrightarrow f \text{ invertible in } \mathcal{O}_X.$$

The relative spectrum, reformulated

Let $B \to A$ be an algebra in a topos.

Is there a **free local and local-over-*B* ring** $A \to A'$ over A?

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\text{local}"] \arrow[dr, bend right, "\text{local}"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & \underset{}{\overset{\text{local}}{R}} \\
& \underset{\text{local}}{A'} \arrow[ur, dashed, "\text{local}"'] &
\end{tikzcd}$$

Form limits in the category of **locally ringed locales** by **relocalising** the corresponding limit in ringed locales.

The étale subtopos

Recall that the **Kummer sequence** is not exact in $\mathrm{Zar}(S)$ at the third term:

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow (\underline{\mathbb{A}}^1)^\times \xrightarrow{(\cdot)^n} (\underline{\mathbb{A}}^1)^\times \longrightarrow 1$$

But we have:

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall f : (\underline{\mathbb{A}}^1)^\times.\, \Box_{\text{ét}}(\exists g : (\underline{\mathbb{A}}^1)^\times.\, f = g^n),$$

where $\Box_{\text{ét}}$ is such that $\mathrm{Zar}(S)_{\Box_{\text{ét}}} \hookrightarrow \mathrm{Zar}(S)$ is the **big étale topos** of S. It is the largest subtopos of $\mathrm{Zar}(S)$ where

$$\ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1 \text{ is separably closed} \urcorner$$

holds [reinterpretation of Wraith, PSSL 1].