



Große Zahlen,
sehr große Zahlen,
sehr sehr große Zahlen und
mehr als unendlich große Zahlen

– eine Einladung in fortgeschrittene Googologie –



Weihnachtsvorlesung am 17. Dezember 2019
Fragen sind jederzeit willkommen! Bitte nicht bis zum Ende aufsparen.

Ingo Blechschmidt
Lehrstuhl für Nichtlineare Analysis

Teil 0

Große Zahlen

300 000 Augsburger*innen

$10^{19} = \underbrace{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{19 \text{ Nullen}}$ Sandkörner auf der Erde

$10^{80} = \underbrace{1000\dots000}_{80 \text{ Nullen}}$ Elementarteilchen im Universum







Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^2} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4)$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^2} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} \left. \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} \quad \left. \right\} \text{65 536 viele Zweien}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2))$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} \quad \left. \right\} \text{65 536 viele Zweien}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \quad \left. \right\} \text{65 536 viele Zweien}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)$$

$$= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \quad \left. \right\} \text{viele Zweien}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)$$

$$= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} = \underbrace{2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (\cdots \uparrow\uparrow 2)))}_{2^2 \cdot \cdot \cdot} \quad \left. \right\} \text{viele Zweien}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$\text{Grahams Zahl} = 3 \uparrow \overbrace{\dots}^3 \uparrow 3 \\ \quad \quad \quad 3 \uparrow \overbrace{\dots}^3 \uparrow 3 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad 3 \uparrow \overbrace{\dots}^3 \uparrow 3 \\ \quad \quad \quad 3 \uparrow \overbrace{\dots}^3 \uparrow 3 \quad \left. \right\} 64 \text{ Ebenen}$$

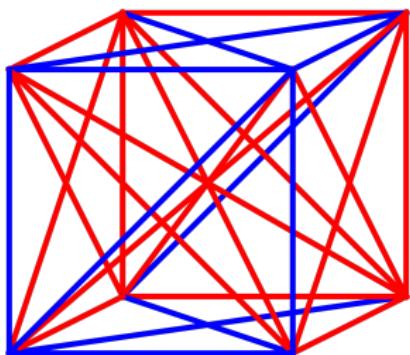
Teil I

Sehr große Zahlen

Grahams Zahl = $3 \uparrow \dots \uparrow 3$

$3 \uparrow \dots \uparrow 3$
 \vdots
 $3 \uparrow \dots \uparrow 3$
 $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$

64 Ebenen



$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$

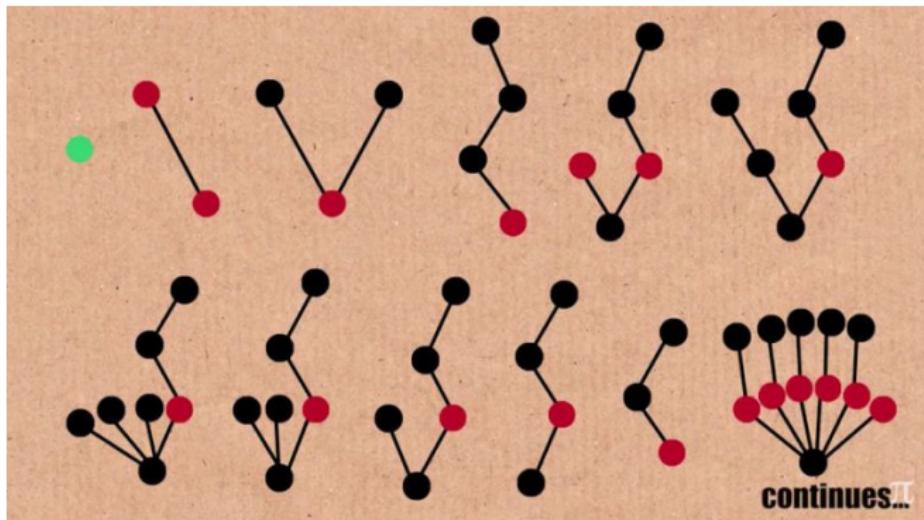
$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$$

Teil II

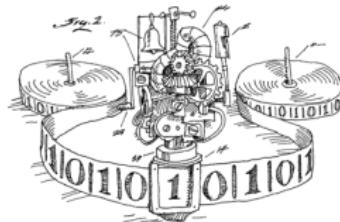
Sehr sehr große Zahlen



Jeder Wald stirbt schlussendlich, bei einer Maximalzahl
von **TREE(3)** Bäumen.

Teil III

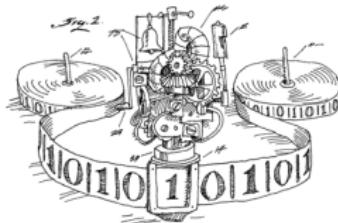
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.

Teil III

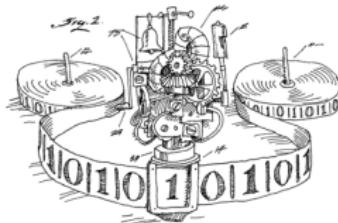
Sehr sehr sehr große Zahlen



- $\text{BB}(n)$ ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
 - Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar**.

Teil III

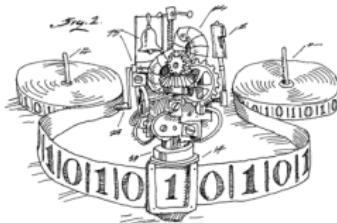
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.

Teil III

Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
 - Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.
 - Keine Vermutung über den Wert von BB(1919) ist mathematisch beweisbar, noch nicht einmal "BB(1919) = \heartsuit " wo bei \heartsuit der wahre Wert von BB(1919) ist.



Sehr sehr sehr sehr große Zahlen

- Rayo(n) ist die größte Zahl, die man mit höchstens n Zeichen mathematisch präzise beschreiben kann.
- Die Rayo-Funktion **dominiert** jede mathematisch präzise definierbare Funktion.





Unendlich große Zahlen

Ordinalzahlen
messen Anordnung



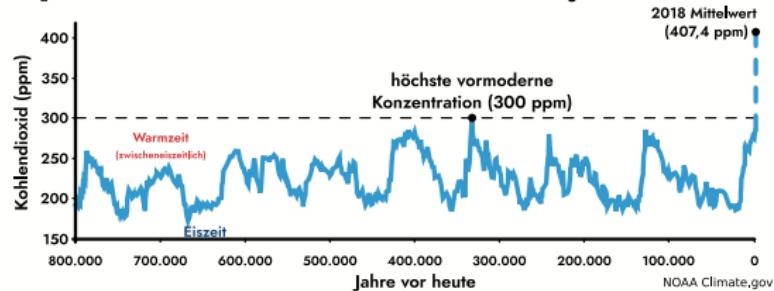
Demo für Klimagerechtigkeit: 20.12. 11⁰⁰ Kö

✓ Wir fordern:

- 🚩 Regierung soll die **Wahrheit** sagen
- 🚍 Bus & Tram: viel **günstiger** und mehr Linien
- 🐎 **Mehr Plätze** zum Bummeln, Leben und für Kinder zum Spielen – weniger Autoflächen
- 🚲 Mehr Schutz beim **Radfahren**
- 👷 Erhalt von **Arbeitsplätzen**
- ✳️ **Keine Steuergelder** für Klimaschädigung
- 💵 **Mehr Geld für Menschen**, die wenig das Klima schädigen – die reichsten 10 % verursachen die Hälfte aller CO₂-Emissionen

Keine Panikmache – alle **Maßnahmen** zur Bewältigung der Klimakrise sind Regierungen bekannt und müssen nun **für alle gerecht** umgesetzt werden. Persönliche Gewohnheitsänderungen und nachhaltigere Produktion sind weitere Eckpfeiler. **Verabreden Sie sich im Freundeskreis** zum gemeinsamen Demobesuch. Zuletzt waren in Augsburg so viele auf der Straße wie seit 30 Jahren nicht.

CO₂ während Eiszeiten und Warmzeiten in den letzten 800.000 Jahren



Wieso? (Quelle:

Umwelt
Bundesamt



Klimawandel bedeutet **nicht**, dass Winter milder 🎄 und Sommer schöner werden 🌞. **Sondern, obwohl** es nur um ein paar Grad geht:

🌿 **Riesige Ernteausfälle** – 8.000 deutsche Bauernhöfe beantragten staatliche Nothilfe in Höhe von 1 Mrd. Euro, um ihre Verluste nach einem Ernterückgang mit 3 Mrd. Euro Schäden auszugleichen

🔥 Waldbrände, Insektensterben, **unerträgliche Hitze und schlimme Kälte** – besonders gefährlich für Alte, Kinder und Kranke – schon eine Erwärmungsbegrenzung auf 1,5 °C statt 2 °C kann **Wasserknappheit** in der Weltbevölkerung halbieren

🤒 **Tropische Krankheiten** in Deutschland

💵 **Große Steuerausgaben** zur Bekämpfung von Klimawandelfolgen und erhebliche Kosten für die Wirtschaft