



Große Zahlen, sehr große Zahlen, sehr sehr große Zahlen und mehr als unendlich große Zahlen

– eine Einladung in fortgeschrittene Googologie –

Weihnachtsvorlesung am 17. Dezember 2019

Fragen sind jederzeit willkommen! Bitte nicht bis zum Ende aufsparen.

Ingo Blechschmidt
Lehrstuhl für Nichtlineare Analysis

Teil 0

Große Zahlen

300 000 Augsburger*innen

$10^{19} = \underbrace{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{19\text{ Nullen}}$ Sandkörner auf der Erde

$10^{80} = \underbrace{1000 \dots 000}_{80\text{ Nullen}}$ Elementarteilchen im Universum







Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4)$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$\begin{aligned} 2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\ &= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien} \end{aligned}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$\begin{aligned} 2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\ &= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien} \end{aligned}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2))$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$\begin{aligned} 2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\ &= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien} \end{aligned}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$\begin{aligned} 2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\ &= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4) \\ &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \end{aligned}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} 65\,536 \text{ viele Zweien}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)$$

$$= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} = \underbrace{2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (\cdot^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}} \uparrow\uparrow 2)))}}_{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \text{ viele Zweien}}$$

Teil I

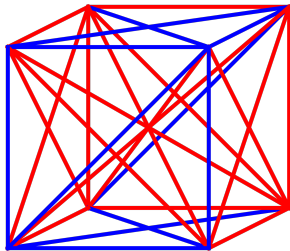
Sehr große Zahlen

Grahams Zahl =
$$\left. \begin{array}{c} 3 \uparrow \dots \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \dots \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \vdots \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 \end{array} \right\} 64 \text{ Ebenen}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

Grahams Zahl =
$$\left. \begin{array}{c} 3 \uparrow \dots \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \dots \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \vdots \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \dots \dots \uparrow 3 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 \end{array} \right\} 64 \text{ Ebenen}$$



$$\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\cdots = 2$$

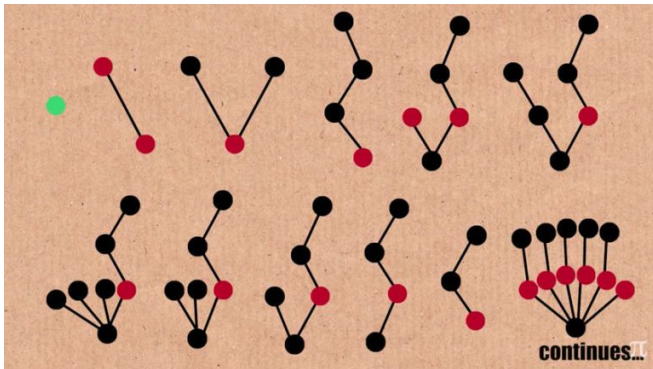
$$\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\cdots = 2$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Teil II

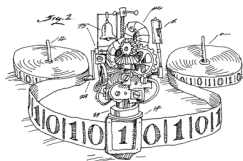
Sehr sehr große Zahlen



Jeder Wald stirbt schlussendlich, bei einer Maximalzahl
von **TREE(3)** Bäumen.

Teil III

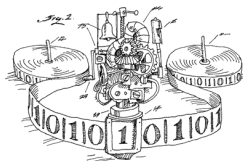
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.

Teil III

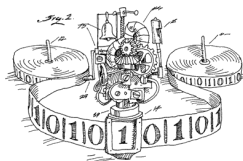
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **$BB(n)$** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar**.

Teil III

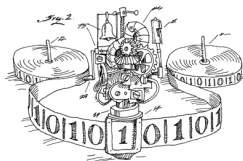
Sehr sehr sehr große Zahlen



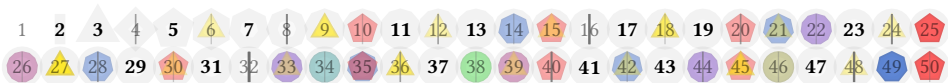
- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.

Teil III

Sehr sehr sehr große Zahlen



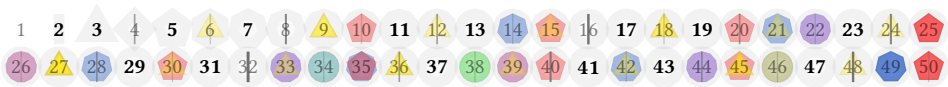
- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.
- Keine Vermutung über den Wert von $\text{BB}(1919)$ ist mathematisch beweisbar, noch nicht einmal “ $\text{BB}(1919) = \heartsuit$ ” wobei \heartsuit der wahre Wert von $\text{BB}(1919)$ ist.



Sehr sehr sehr sehr große Zahlen

- **Rayo(n)** ist die größte Zahl, die man mit höchstens n Zeichen mathematisch präzise beschreiben kann.
- Die Rayo-Funktion **dominiert** *jede* mathematisch präzise definierbare Funktion.





Unendlich große Zahlen

Ordinalzahlen

messen Anordnung



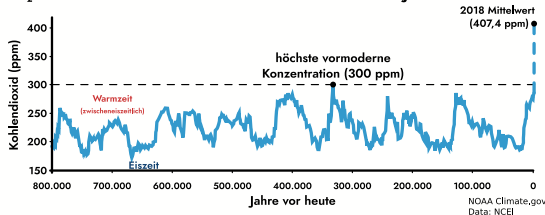
Demo für Klimagerechtigkeit: 20.12. 11⁰⁰ Kö

✓ Wir fordern:

- 🇩🇪 Regierung soll die **Wahrheit** sagen
- 🚊 **Bus & Tram:** viel **günstiger** und mehr Linien
- 🛵 **Mehr Plätze** zum Bummeln, Leben und für Kinder zum Spielen – weniger Autoflächen
- 🚲 Mehr Schutz beim **Radfahren**
- 👷 Erhalt von **Arbeitsplätzen**
- 💰 **Keine Steuergelder** für Klimaschädigung
- 🏠 **Mehr Geld für Menschen**, die wenig das Klima schädigen – die reichsten 10 % verursachen die Hälfte aller CO₂-Emissionen

Keine Panikmache – alle **Maßnahmen** zur Bewältigung der Klimakrise sind Regierungen bekannt und müssen nun **für alle gerecht** umgesetzt werden. Persönliche Gewohnheitsänderungen und nachhaltigere Produktion sind weitere Eckpfeiler. **Verabreden Sie sich im Freundeskreis** zum gemeinsamen Demobesuch. Zuletzt waren in Augsburg so viele auf der Straße wie seit 30 Jahren nicht.

CO₂ während Eiszeiten und Warmzeiten in den letzten 800.000 Jahren



😞 Wieso? (Quelle:

Klimawandel bedeutet **nicht**, dass Winter milder 🌨️ und Sommer schöner werden ☀️. **Sondern, obwohl** es nur um ein paar Grad geht:

- 🌾 **Riesige Ernteauffälle** – 8.000 deutsche Bauernhöfe beantragten staatliche Nothilfe in Höhe von 1 Mrd. Euro, um ihre Verluste nach einem Ernterückgang mit 3 Mrd. Euro Schäden auszugleichen
- 🔥 Waldbrände, Insektensterben, **unerträgliche Hitze und schlimme Kälte** – besonders gefährlich für Alte, Kinder und Kranke – schon eine Erwärmungsbegrenzung auf 1,5 °C statt 2 °C kann **Wasserknappheit** in der Weltbevölkerung halbieren
- 🦟 **Tropische Krankheiten** in Deutschland
- 🏠 Große **Steuerausgaben** zur Bekämpfung von Klimawandelfolgen und erhebliche Kosten für die Wirtschaft