

Mathematische Alternativuniversen

Ingo Blechschmidt

Forschungskolloquium der Augsburger Stipendiatengruppe

13. Januar 2017

1 Über Wahrheit

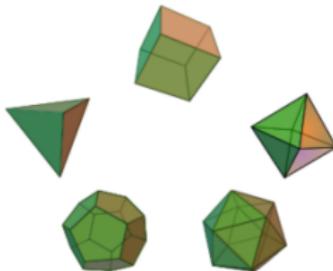
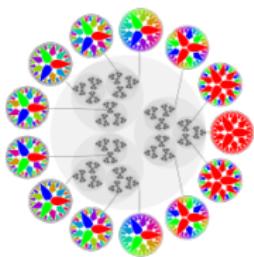
2 Fallbeispiel: die Kontinuumshypothese

- Wie viele ganze Zahlen gibt es?
- Wie viele reelle Zahlen gibt es?
- Gibt es eine Zwischenstufe?

3 Beispiele für Alternativuniversen

4 Motivation fürs Studium von Alternativuniversen

Über Wahrheit



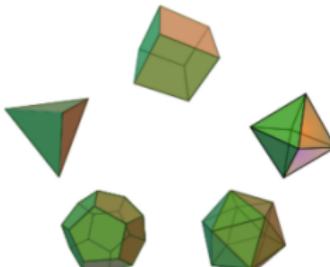
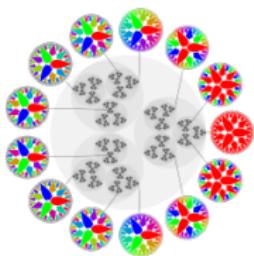
„Es gibt unendlich
viele Primzahlen.“

„Es gibt nur fünf
platonische Körper.“

„Der goldene Schnitt ist
die irrationalste Zahl.“

- Mathematische Aussagen werden als völlig objektiv und unabhängig von menschlichen Stimmungen angesehen.

Über Wahrheit



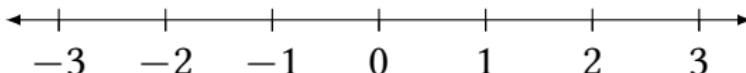
„Es gibt unendlich
viele Primzahlen.“

„Es gibt nur fünf
platonische Körper.“

„Der goldene Schnitt ist
die irrationalste Zahl.“

- Mathematische Aussagen werden als völlig objektiv und unabhängig von menschlichen Stimmungen angesehen.
- Tatsächlich hängt ihr Wahrheitsgehalt aber von der Wahl des **mathematischen Universums** ab:
 - 1 Die üblichen Axiome legen das Spiel nicht eindeutig fest.
 - 2 Wir können die Axiome auch modifizieren.

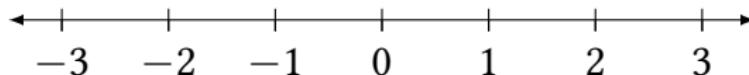
Größenvergleiche im Unendlichen



Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: 0, 1, 2, ...
- die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Größenvergleiche im Unendlichen



Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: 0, 1, 2, ...
- die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...



Größenvergleiche im Unendlichen

Die beiden Mengen sind **gleich groß**.

alle nat. Zahlen		alle ganzen Zahlen
0	↔	0
1	↔	1
2	↔	-1
3	↔	2
4	↔	-2
5	↔	3
6	↔	-3
:		:

Es gibt **genauso viele** natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots$
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen: $0,25, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}, \dots$

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots$
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen: $0,25, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}, \dots$

Es gibt **mehr** reelle Zahlen als natürliche.

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots$
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen: $0,25, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}, \dots$

Es gibt **mehr** reelle Zahlen als natürliche.

alle nat. Zahlen		viele reelle Zahlen
0	\longleftrightarrow	0 , 2 5 0 0 0 0 ...
1	\longleftrightarrow	3 , 1 4 1 5 9 2 ...
2	\longleftrightarrow	1 , 4 1 4 2 1 3 ...
3	\longleftrightarrow	1 , 2 3 4 5 6 7 ...
:		:

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots$
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen: $0,25, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}, \dots$

Es gibt **mehr** reelle Zahlen als natürliche.

alle nat. Zahlen	\longleftrightarrow	viele reelle Zahlen
0	\longleftrightarrow	$0, 2 \boxed{5} 0 0 0 0 \dots$
1	\longleftrightarrow	$3, \boxed{1} 4 1 5 9 2 \dots$
2	\longleftrightarrow	$1, 4 \boxed{1} 4 2 1 3 \dots$
3	\longleftrightarrow	$1, 2 \boxed{3} 4 5 6 7 \dots$
\vdots		\vdots

Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

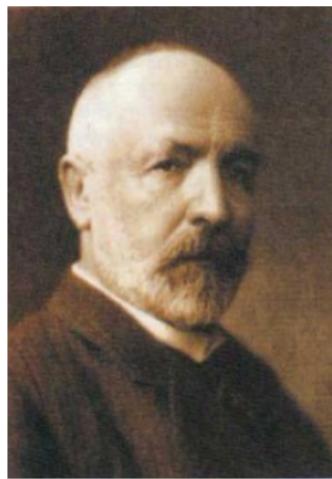
- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots$
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen: $0,25, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{2}, \dots$

Es gibt **mehr** reelle Zahlen als natürliche.

alle nat. Zahlen	\longleftrightarrow	viele reelle Zahlen
0	\longleftrightarrow	$0, 2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$
1	\longleftrightarrow	$3, 1 \ 4 \ 1 \ 5 \ 9 \ 2 \ \dots$
2	\longleftrightarrow	$1, 4 \ 1 \ 4 \ 2 \ 1 \ 3 \ \dots$
3	\longleftrightarrow	$1, 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \dots$
\vdots		\vdots

Was ist mit $1,225\dots$?

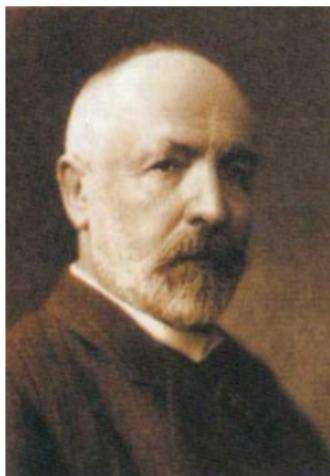
Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} ?

Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

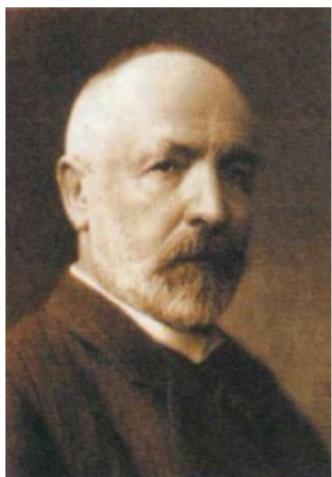


Kurt Gödel (* 1906, † 1978)

Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} ?

Es gibt keinen
Beweis, dass es eine
Zwischenstufe gibt.

Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)



Kurt Gödel (* 1906, † 1978)



Paul Cohen (* 1934, † 2007)

Gibt es eine
Zwischenstufe
zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} ?

Es gibt keinen
Beweis, dass es eine
Zwischenstufe gibt.

Es gibt keinen
Beweis, dass es keine
Zwischenstufe gibt.

Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:

Es gibt keine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

In **Cohens Topos** gilt:

Es gibt eine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:

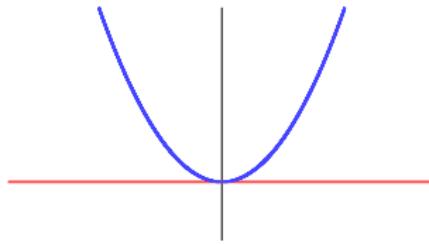
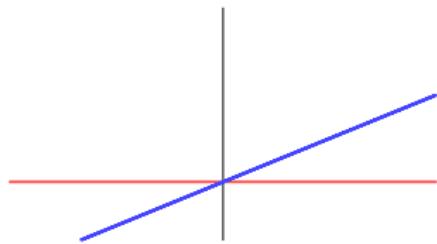
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

In **Cohens Topos** gilt:

Es gibt eine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

Im **glatten Topos** gilt:

Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.



Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:

Es gibt keine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

In **Cohens Topos** gilt:

Es gibt eine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

Im **glatten Topos** gilt:

Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:

Jede Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:

Es gibt keine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

In **Cohens Topos** gilt:

Es gibt eine Zwischenstufe zwischen \mathbb{N} und \mathbb{R} .

Im **glatten Topos** gilt:

Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:

Jede Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

Im **Zariski-Topos** gilt:

Jede Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Polynom.

Wieso sich mit Topoi befassen?

Weil sie ...

- existieren,
- einen Beitrag zur Philosophie der Mathematik leisten,
- das Studium kurioser Traumaxiome ermöglichen,
- Querverbindungen innerhalb der Mathematik herstellen und
- mathematische Probleme vereinfachen können:
für jede Situation den passenden Topos.



Bildquellen

<http://news.stanford.edu/news/2007/april14/gifs/Cohen.jpg>
<https://financialtribune.com/sites/default/files/field/image/december/486.jpg>
<https://lh3.googleusercontent.com/-Jsof31fHsyA/VW64yVjabWI/AAAAAAAACY/B25Ob18geoA/w1448-h2048/PosterToposIHES.jpg>
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Roof_hafez_tomb.jpg/1280px-Roof_hafez_tomb.jpg
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ce/3-adic_integers_with_dual_colorings.svg/220px-3-adic_integers_with_dual_colorings.svg.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/4/42/Kurt_g%C3%B6del.jpg
<http://us.123rf.com/450wm/clairev/clairev1501/clairev150100029/35432850-haufen-von-spielzeug.jpg?ver=6>
<http://www.calctool.org/CALC/math/solids/platonic.png>
<http://www.storyofmathematics.com/images2/cantor.jpg>
<http://www.ufointernationalproject.com/wp-content/uploads/2015/11/a23.jpg>