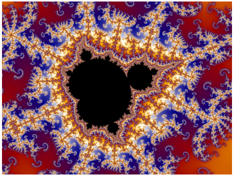
Das Geheimnis der Zahl 5

Ingo Blechschmidt
iblech@speicherleck.de

Pizzaseminar in Mathematik
Universität Augsburg

21. Oktober 2016

Gewidmet an Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg.


Hippasos
2
10
5
8

Gliederung

Ein Entwurfsmuster der Natur

Ein Entwurfsmuster der Natur

Fibonaccizahlen:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, . . .

Ein merkwürdiger Bruch

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}=?$$

Ein merkwürdiger Bruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = \,?$$

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := \,? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Ein merkwürdiger Bruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = ?$$

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = x \cdot (2 + x)$,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$, also müssen wir nur die quadratische Gleichung $0 = x^2 + 2x - 1$ lösen,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := \,?\, - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2+x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$, also müssen wir nur die quadratische Gleichung $0 = x^2 + 2x - 1$ lösen, somit

$$x = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}.$$

Es ist die positive Möglichkeit.

Weitere Beispiele

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}=\sqrt{2}$$

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}=\sqrt{5}$$

$$3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}}=\sqrt{10}$$

Weitere Beispiele

$$[1; 2, 2, 2, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = \sqrt{2}$$

$$[2; 4, 4, 4, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}} = \sqrt{5}$$

$$[3; 6, 6, 6, \ldots] = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}} = \sqrt{10}$$

Weitere Beispiele

1. $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$
2. $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots]$
3. $\sqrt{10} = [3; 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots]$
4. $\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots]$
5. $\sqrt{14} = [3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \ldots]$
6. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$
   $= 2{,}718\,281\,8284\,590\,452\,3536\ldots$

Der euklidische Algorithmus

Zur Erinnerung: $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 1{,}41421356\ldots$

$$
\begin{aligned}
1{,}41421356\ldots &= 1 \cdot 1{,}00000000\ldots + 0{,}41421356\ldots \\
1{,}00000000\ldots &= 2 \cdot 0{,}41421356\ldots + 0{,}17157287\ldots \\
0{,}41421356\ldots &= 2 \cdot 0{,}17157287\ldots + 0{,}07106781\ldots \\
0{,}17157287\ldots &= 2 \cdot 0{,}07106781\ldots + 0{,}02943725\ldots \\
0{,}07106781\ldots &= 2 \cdot 0{,}02943725\ldots + 0{,}01219330\ldots \\
0{,}02943725\ldots &= 2 \cdot 0{,}01219330\ldots + 0{,}00505063\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$


Haskell?
Yeah, I use it to program our starship.

Bestapproximationen durch Kettenbrüche

Theorem

Wenn man die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x abschneidet, erhält man einen Bruch a/b, der unter allen Brüchen mit Nenner $\leq b$ der Zahl x am nächsten liegt.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \rightsquigarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \approx 1{,}42$$

Bestapproximationen durch Kettenbrüche

Theorem

Wenn man die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x abschneidet, erhält man einen Bruch a/b, der unter allen Brüchen mit Nenner $\leq b$ der Zahl x am nächsten liegt.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \rightsquigarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \approx 1{,}42$$

Bonus. Je größer der Koeffizient nach der Abschneidestelle ist, desto besser ist die Näherung a/b.

Liebe ist wichtig.

♡

Pi ist wichtig.

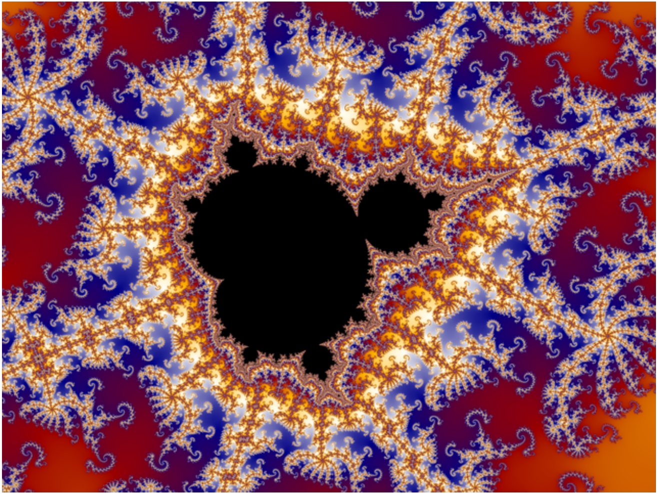
π

Approximationen von π

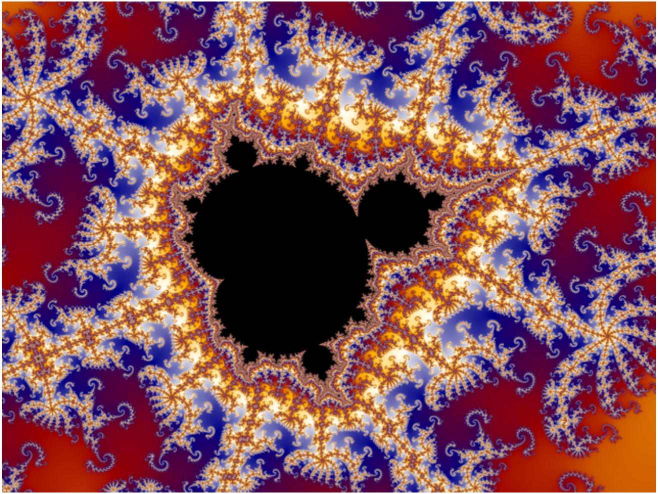
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

1. 3
2. $[3; 7] = 22/7 = \underline{3{,}14}28571428\ldots$
3. $[3; 7, 15] = 333/106 = \underline{3{,}1415}094339\ldots$
4. $[3; 7, 15, 1] = 355/113 = \underline{3{,}141592}9203\ldots$ (Milü)

Das Mandelbrot-Fraktal



Das Mandelbrot-Fraktal



Im Mandelbrot-Fraktal tauchen die Fibonaccizahlen auf.

Spiralen in der Natur

Die irrationalste aller Zahlen

Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

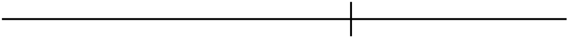
$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Die irrationalste aller Zahlen

Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Stattdessen ist er der **goldene Winkel** $\Phi \cdot 360^\circ \approx 582^\circ$ (äqv.: 138°):



$$\Phi = \textbf{goldener Schnitt} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Theorem

Der goldene Schnitt Φ ist die ***irrationalste aller Zahlen****.*

Die irrationalste aller Zahlen

Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Stattdessen ist er der **goldene Winkel** $\Phi \cdot 360^\circ \approx 582^\circ$ (äqv.: 138°):

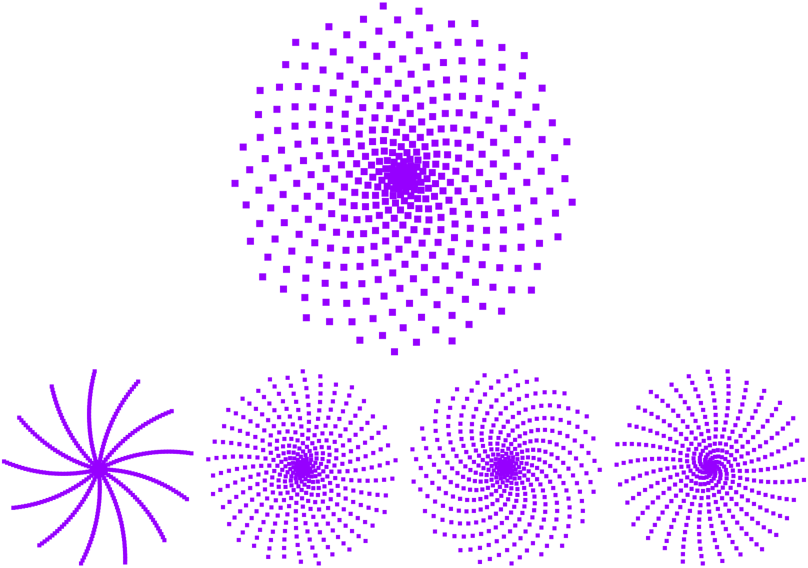
$$\Phi = \textbf{goldener Schnitt} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Theorem

Der goldene Schnitt Φ ist die ***irrationalste aller Zahlen.***

Beweis. $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$.

(Nicht-)Verwendung des goldenen Winkels



Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 \qquad = \quad 1/1$
2. $[1; 1] \qquad = \quad 2/1$
3. $[1; 1, 1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 \qquad = \quad 1/1$
2. $[1; 1] \qquad = \quad 2/1$
3. $[1; 1, 1] \qquad = \quad 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 \quad = \quad 1/1$
2. $[1; 1] \quad = \quad 2/1$
3. $[1; 1, 1] \quad = \quad 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1] \quad = \quad 5/3$
5. $[1; 1, 1, 1, 1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 = 1/1$
2. $[1; 1] = 2/1$
3. $[1; 1, 1] = 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1] = 5/3$
5. $[1; 1, 1, 1, 1] = 8/5$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 = 1/1$
2. $[1; 1] = 2/1$
3. $[1; 1, 1] = 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1] = 5/3$
5. $[1; 1, 1, 1, 1] = 8/5$
6. $[1; 1, 1, 1, 1, 1] = 13/8$
7. $[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 21/13$
8. $[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 34/21$
9. $[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 55/34$

Die Ananas aus SpongeBob Schwammkopf

Von Vi Hart, Mathemusikerin.

Bildquellen

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/Vi_Hart.jpg
http://joachim-reichel.org/software/fraktal/mandelbrot_large.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bellis_perennis_white_(aka).jpg
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/coneflower.jpg (Tim Stone)
http://www.bibliotecapleyades.net/imagenes_ciencia2/conscious_universe472_02.jpg
http://www.education.txstate.edu/ci/faculty/dickinson/PBI/PBIFall06/GeoNature/Content/Fibonacci_Lesson_files/image037.gif
http://www.sciencedump.com/sites/default/files/styles/article_width/public/field/gallery/8247962.jpg