Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

1. Aufgabenblatt

Algebra II

02. Mai 2011

Willkommen zur Algebra II im Sommersemester 2011!

Die Übungen beginnen DIESE WOCHE. Zusammen mit dem Übungsleiter werdet Ihr Aufgabenblatt 1 lösen.
Aufgabenblatt 2 ist selbstständig zu bearbeiten und kann bis Montag, den 09. Mai, 14:00 Uhr in den Briefkasten im Erdgeschoss von Gebäude L1 mit der Aufschrift „Algebra II" eingeworfen werden. Der Abgabetermin für die Aufgaben der folgenden Übungsblätter ist jeweils der auf die Ausgabe folgende Montag bis 15:00 Uhr.
Vergesst bitte nicht Eure Abgaben DEUTLICH mit Eurem eigenen Namen, der Nummer Eurer Übungsgruppe und dem Namen Eures Übungsleiters zu versehen. Weitere Einzelheiten zum Ablauf der Übungen und der Bonuspunkteregelung geben die Tutoren in den Übungen bekannt.
Auf den kommenden Übungszetteln werden gewisse Aufgaben mit dem Zusatz „**(Staatsexamens-/Klausuraufgaben)**" versehen. Diese Aufgaben sind im besonderen Maße für das Staatsexamen in Algebra und die Klausur in Algebra II am Ende des Semesters relevant. Sie werden im Klausurenkurs in den Ferien besprochen werden.

Aufgabe 1. Gibt es auf der Menge aller rationaler Zahlen eine Gruppenstruktur, so daß die Gruppenverknüpfung die Multiplikation ist?

Aufgabe 2. Finde zwei quadratische Matrizen A, B gleicher Größe über den rationalen Zahlen, so daß $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $e \in G$ ein Element, so daß $e \cdot x = x$ für alle Elemente x aus G gilt. Zeige, daß dann schon $e = 1$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Seien a und b zwei Gruppenelemente. Gesucht seien Gruppenelemente x, welche die Gleichung

$$ax = b$$

erfüllen. Zeige, daß es genau eine Lösung x gibt.

Aufgabe 5. Sei n eine ganze Zahl. Ist für eine allgemeine Gruppe G die Potenzabbildung

$$G \to G, \quad x \mapsto x^n$$

ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 6. Sei G eine Gruppe. Sei weiter y ein Element in G. Zeige, daß die *Konjugation* $G \to G, x \mapsto yxy^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 7. Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, daß $x^2 = 1$ für jedes Element $x \in G$ gilt. Zeige, daß G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 8. Seien G und H zwei zweielementige Gruppen. Zeige, daß G und H auf genau eine Art und Weise zueinander isomorph sind.

Aufgabe 9. Gib einen kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_4)$ und C_2 an.

Aufgabe 10. Seien G und H zwei abelsche Gruppen. Zeige, daß dann auch $G \times H$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 11. Wie gehabt, bezeichnen wir mit C_2 eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 und mit C_4 eine zyklische Ordnung der Ordnung 4. Zeigen Sie, daß es keinen Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ und C_4 gibt. Folgere, daß es nicht isomorphe endliche Gruppen gleicher Ordnung gibt.

Aufgabe 12. Seien G und H zwei Gruppen. Seien $g \in G$ und $h \in H$. Zeige, daß

$$1, gh, ghgh, ghghgh, \ldots$$

paarweise verschiedene Elemente von $G * H$ sind, falls $g \neq 1$ und $h \neq 1$ gelten.

Aufgabe 13. Sei G eine Gruppe. Gib einen kanonischen Gruppenisomorphismus von $G * 1$ nach G an, wobei 1 die triviale Gruppe bezeichnet.

Aufgabe 14. Zeige, daß $11'(-1)(-1')$ in $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ nicht trivial ist.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

2. Aufgabenblatt

Algebra II

02. Mai 2011

Aufgabe 1. (Staatsexamens-/Klausuraufgaben) (3+3+3+3 Zusatzpunkte)

(S1) Seien H_1 und H_2 zwei Untergruppen einer Gruppe G. Es gelte $G = H_1 \cup H_2$, das heißt, jedes Element aus G sei in (mindestens) einer der Untergruppen enthalten. Sei H_1 eine echte Teilmenge von G (wir sprechen auch von einer *echten Untergruppe*). Zeige, daß dann schon $H_2 = G$ gelten muß.

(S2) Sei H eine endliche Untergruppe einer zyklischen Gruppe G. Zeige, daß H eine endliche zyklische Gruppe ist.

(S3) Sei G eine endliche Gruppe, so daß $\operatorname{Aut}(G)$ eine zyklische Gruppe ist. Zeige, daß G abelsch ist.

(S4) Zeige, daß die additive Gruppe der rationalen Zahlen nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Gib alle Gruppenautomorphismen der ganzen Zahlen auf sich selbst an.

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

(i) Sei $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $x \in G$ ein Element endlicher Ordnung. Zeige, daß die Ordnung von $\phi(x)$ ebenfalls endlich ist und zwar ein Teiler der Ordnung von x.

(ii) Seien x und y zwei Elemente einer Gruppe G. Zeige, daß es einen Gruppenisomorphismus $\phi\colon G \to G$ mit $\phi(xy) = yx$ gibt.

(iii) Seien x und y zwei Elemente einer Gruppe G, so daß xy endliche Ordnung hat. Zeige, daß dann auch yx endliche Ordnung hat.

Aufgabe 4. (Quickies) (1+1+2+2 Punkte)

(Q1) Sei G eine endliche Gruppe von Primzahlordnung. Zeige, daß G genau zwei endliche Untergruppen hat.

(Q2) Zeige, daß jede zyklische Gruppe abelsch ist.

(Q3) Sei G eine Gruppe. Seien H und H' zwei konjugierte Untergruppen von G. Gib einen Gruppenisomorphismus zwischen H und H' an.

(Q4) Eine endliche Gruppe wirke auf einer endlichen Menge. Ist die Länge einer Bahn der Operation immer ein Teiler der Gruppenordnung?

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)
Seien n und m zwei natürliche Zahlen, deren Minimum mit k bezeichnet sei.

(a) Zeige, daß die Gruppe $G \coloneqq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$G \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S,T),A) \mapsto SAT^{-1}$$

auf der Menge der $(n \times m)$-Matrizen wirkt.

(b) Zeige, daß durch den Rang eine wohldefinierte Bijektion

$$\mathrm{rk}\colon G\backslash \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \{0,\dots,k\}, \quad A \mapsto \mathrm{rk}\, A$$

gegeben wird.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Wirke eine Gruppe G auf einer Menge X. Zeige, daß die Wirkung von G auf X genau dann frei ist, wenn die Abbildung

$$G \times X \to X \times X, \quad (g,x) \mapsto (gx, x)$$

injektiv ist.

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Wirke eine endliche Gruppe auf einer endlichen Menge X. Zeige, daß endliche Untergruppen H_1, …, H_n von G und ein Isomorphismus

$$G/H_1 \amalg \cdots \amalg G/H_n \to X$$

existieren, wobei jeder einzelne Summand der disjunkten Vereinigung auf der linken Seite durch Linkstranslation eine G-Wirkung bekommt.

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Eine endliche Gruppe der Ordnung 91 wirke auf einer endlichen Menge mit 71 Elementen. Zeige, daß die Operation mindestens einen Fixpunkt hat.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

3. Aufgabenblatt

Algebra II

09. Mai 2011

Aufgabe 1. (3+3 Punkte)
Seien n und m zwei natürliche Zahlen, deren Minimum mit k bezeichnet sei.

(a) Zeige, daß die Gruppe $G \coloneqq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$G \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S,T),A) \mapsto SAT^{-1}$$

auf der Menge der $(n \times m)$-Matrizen wirkt.

(b) Zeige, daß durch den Rang eine wohldefinierte Bijektion

$$\mathrm{rk}\colon G\backslash \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \{0, \ldots, k\}, \quad A \mapsto \mathrm{rk}\, A$$

gegeben wird.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Wirke eine Gruppe G auf einer Menge X. Zeige, daß die Wirkung von G auf X genau dann frei ist, wenn die Abbildung

$$G \times X \to X \times X, \quad (g,x) \mapsto (gx, x)$$

injektiv ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Wirke eine endliche Gruppe auf einer endlichen Menge X. Zeige, daß endliche Untergruppen H_1, …, H_n von G und ein Isomorphismus

$$G/H_1 \amalg \cdots \amalg G/H_n \to X$$

existieren, wobei jeder einzelne Summand der disjunkten Vereinigung auf der linken Seite durch Linkstranslation eine G-Wirkung bekommt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Eine endliche Gruppe der Ordnung 91 wirke auf einer endlichen Menge mit 71 Elementen. Zeige, daß die Operation mindestens einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 5. (4+4 Punkte)

(α) Sei G eine Gruppe. Sei $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie normaler Untergruppen von G. Zeige, daß $N := \bigcap_{i \in I} N_i$ wieder ein Normalteiler von G ist.

(β) Sei G eine Gruppe. Sei H eine Untergruppe von G. Sei $(N_i)_{i \in I}$ die Familie aller Normalteiler von G, welche H enthalten. Zeige, daß $\bigcap_{i \in I} N_i$ der normale Abschluß von H in G ist.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Gib einen ausführlichen Beweis für Proposition 6.67 auf Seite 251 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 7. (Quickies) (2+2+3 Punkte)

(Q1) Sei $n \geq 3$. Gib einen Isomorphismus von der Dieder-Gruppe D_n zu einer Gruppe mit zwei Erzeugern und zwei Relationen an.

(Q2) Zeige, daß jedes direkte Produkt zweier Gruppen auch als halbdirektes Produkt angesehen werden kann.

(Q3) Eine endliche Gruppe wirke auf einer endlichen Menge. Ist die Länge einer Bahn der Operation immer ein Teiler der Gruppenordnung?

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler in G und H eine beliebige Untergruppe von G. Jedes Element von G lasse sich als Produkt nh mit $n \in N$ und $h \in H$ darstellen. Schließlich sei $N \cap H$ die triviale Gruppe. Gib eine Wirkung von H auf N an, so daß für das diesbezüglich konstruierte halbdirekte Produkt $N \rtimes H$ gilt, daß

$$N \rtimes H \to G, \quad (n, h) \mapsto nh$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Sei $n \geq 1$. Zeige, daß die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem halbdirekten Produkte von $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ mit C_2 ist.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011
Dipl.-Math. Franz Vogler

4. Aufgabenblatt

Algebra II

16. Mai 2011

Aufgabe 1. (Quickies) (2+2+3 Punkte)

(Q1) Sei $n \geq 3$. Gib einen Isomorphismus von der Dieder-Gruppe D_n zu einer Gruppe mit zwei Erzeugern und zwei Relationen an.

(Q2) Zeige, daß jedes direkte Produkt zweier Gruppen auch als halbdirektes Produkt angesehen werden kann.

(Q3) Eine endliche Gruppe wirke auf einer endlichen Menge. Ist die Länge einer Bahn der Operation immer ein Teiler der Gruppenordnung?

Aufgabe 2. (5+4 Punkte)

(1) Seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler in G und H eine beliebige Untergruppe von G. Jedes Element von G lasse sich als Produkt nh mit $n \in N$ und $h \in H$ darstellen. Schließlich sei $N \cap H$ die triviale Gruppe. Gib eine Wirkung von H auf N an, so daß für das diesbezüglich konstruierte halbdirekte Produkt $N \rtimes H$ gilt, daß

$$N \rtimes H \to G, \quad (n, h) \mapsto nh$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(2) Sei $n \geq 1$. Zeige, daß die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem halbdirekten Produkte von $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ mit C_2 ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Zeige, daß

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}), \quad (b, A) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus von der Galileischen Gruppe in die allgemeine lineare Gruppe ist. Wir können die Galileische Gruppe also auch als Matrizengruppe auffassen.

Aufgabe 4. (3+4+8 Punkte)

($\mathfrak{a}$) Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Sei K eine Untergruppe von H. Zeige, daß das das Urbild $f^{-1}(K)$ eine Untergruppe von G ist.

($\mathfrak{b}$) Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Sei N ein Normalteiler von H. Zeige, daß das das Urbild $f^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G ist.

($\mathfrak{c}$) Seien G eine endliche Gruppe und N ein endlicher Normalteiler in G. Zeige, daß G genau dann auflösbar ist, wenn G/N und N auflösbare Gruppen sind.

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Zeige, daß jede endliche p-Gruppe (also jede endliche Gruppe, deren Ordnung eine Primpotenz ist), auflösbar ist.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Sei G ein endliche Gruppe. Zeige, daß ein größter endlicher auflösbarer Normalteiler N von G existiert (das heißt jeder endliche auflösbare Normalteiler von G liegt in N).

Aufgabe 7. (8 Punkte)
Zeige: Sind N und N' zwei auflösbare Normalteiler einer Gruppe G, so ist auch

$$N \cdot N' = \{nn' \mid n \in N, n' \in N'\}$$

ein auflösbarer Normalteiler von G.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011
Dipl.-Math. Franz Vogler

5. Aufgabenblatt

Algebra II

23. Mai 2011

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei p eine Primzahl. Seien G eine endliche Gruppe und $H \subseteq K \subseteq G$ endliche Untergruppen. Zeige: Ist H eine Sylowsche p-Untergruppe zu G, so ist H auch eine Sylowsche p-Untergruppe zu K.

Aufgabe 2. (7 Punkte)
Sei p eine Primzahl. Für eine endliche abelsche Gruppe G sei H diejenige endliche Teilmenge, die aus all jenen Elementen von G besteht, deren Ordnung eine p-Potenz ist. Zeige, daß H die einzige Sylowsche p-Untergruppe von G ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Gib alle Sylowschen Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 an.

Aufgabe 4. (5 Punkte)
Zeige, daß jede endliche Gruppe der Ordnung 30 einen nicht trivialen Sylowschen Normalteiler besitzt.

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Zeige, daß jede endliche Gruppe der Ordnung 56 einen nicht trivialen Sylowschen Normalteiler besitzt.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Jede endliche Gruppe der Ordnung 36 ist nicht einfach.

Aufgabe 7. (7 Punkte)
Es seien p und q zwei Primzahlen mit $p < q$, so daß p kein Teiler von $q - 1$ ist. Zeige, daß jede endliche Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Zeige, daß die abelsche Gruppe $\mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(3)$ durch nur ein Element erzeugt werden kann. Warum ist dies kein Widerspruch zu Hilfssatz 6.112 auf Seite 279?

Aufgabe 9. (5 Punkte)
Sei d eine ganze Zahl. Sei A eine quadratische Matrix mit ganzzahligen Einträgen der Größe n. Es sei weiter u ein Vektor mit ganzzahligen Einträgen und n Zeilen, so daß $A \cdot u = 0$ modulo d (komponentenweise). Zeige, daß dann auch $(\det A) \cdot u = 0$ modulo d.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

6. Aufgabenblatt

Algebra II

30. Mai 2011

Aufgabe 1. (5 Punkte)
Bestimme die Elementarteiler der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (2+3 Punkte)

(a) Geben Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 24 an.

(b) Geben Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 180 an.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Für jede Primzahl p sei $A[p^\infty]$ die Untergruppe (!) derjenigen Elemente von A, deren Ordnung eine p-Potenz ist. Ist diese Untergruppe nicht trivial, heißt p assoziierte Primzahl zu A und $A[p^\infty]$ die p-primäre Komponente von A. Zeige, daß A nur endliche viele assoziierte Primzahlen besitzt und daß A isomorph zum direkten Produkte ihrer p-primären Komponenten ist.

Aufgabe 4. (5 Punkte)
Zeige die Eindeutigkeit der Darstellung in Proposition 6.115 auf Seite 281 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Sei A eine $(n \times m)$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen, deren Elementarteiler durch d_1, d_2, $\ldots$, d_r mit $d_{i-1} \mid d_i$ gegeben seien. Sei $i \geq 1$. Mit λ_i bezeichnen wir die größten gemeinsamen Teiler aller i-Minoren (das heißt Determinanten von $(i \times i)$-Untermatrizen) von A. Zeige, daß $\lambda_i = d_1 d_2 \cdots d_i$.

Aufgabe 6. (Quickies)(2+2+2 Punkte)

(Q1) Sei R ein kommutativer Ring, welcher nicht der Nullring ist. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, daß $\mathrm{M}_n(R)$ genau für $n = 1$ ein kommutativer Ring ist.

(Q2) Mit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ zu einem Ring wird, wenn wir die Addition und Multiplikation durch die übliche Addition und Multiplikation von Funktionen definieren, das heißt durch

$$\begin{aligned} f + g &\colon x \mapsto f(x) + g(x), \\ f \cdot g &\colon x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

definieren.

(Q3) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine R-Algebra. Zeige, daß

$$\phi\colon R \to S, \quad x \mapsto x \cdot 1$$

ein Ringhomorphismus ist.

Aufgabe 7. (4+4+6 Punkte)

(i) Zeige, daß $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})} = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(ii) Zeige, daß $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} = \mathbb{Z}[\zeta_3]$.

(iii) Sei $n \geq 1$. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeige, daß

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)} = \mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1} | a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\}.$$

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

7. Aufgabenblatt

Algebra II

06. Juni 2011

Aufgabe 1. (Quickies)(1+2+2+2+1+3 Punkte)

(Q1) Seien R ein Ring. Zeige, daß das direkte Produkt $R \times 0$ von R mit dem Nullring als Ring kanonisch isomorph zum Ring R selbst ist.

(Q2) Sei R ein kommutativer Ring. Gibt es einen kanonischen Isomorphismus von Ringen zwischen $R[X, Y]$ und $R[X] \times R[Y]$?

(Q3) Seien R ein kommutativer Ring und n eine natürliche Zahl. Zeige, daß die Diagonalmatrizen einen Unterring von $\mathrm{M}_n(R)$ bilden, welcher als Ring isomorph zum direkten Produkte $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n}$ ist.

(Q4) Schreibe das Ideal $(3, 8, 9)$ in $\mathbb{Z}$ als Hauptideal.

(Q5) Sei p eine Primzahl. Bestimme alle endlich erzeugten Ideale von $\mathbb{Z}_p$.

(Q6) Bestimme die Nilradikale der kommutativen Ringe $\mathbb{Z}/(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ als Hauptideal.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Es existieren nicht verschwindende Elemente e, f in R mit $ef = 0$, $e^2 = e$, $f^2 = f$ und $e + f = 1$.

2. Der Ring R ist als Ring isomorph zu einem Produkte $S \times T$ kommutativer Ringe S und T, die jeweils nicht der Nullring sind.

Aufgabe 3. (3+3 Punkte)

(a) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}_p$ die Menge all derjenigen rationalen Zahlen, in deren vollständig gekürzter Bruchdarstellung der Nenner nicht durch p teilbar ist. Zeige, daß $\mathbb{Z}_p$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und bestimme seine Einheitengruppe.

(b) Bestimme die Einheiten der ganzen Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich. Sei $n \geq 0$. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von R mit $x_1 \cdots x_n = 0$. Zeige, daß ein k mit $x_k = 0$ existiert. Was ist im Falle von $n = 0$?

Aufgabe 5. (4+2+2+2 Punkte)
Sei $\mathbb{Q}[\sin x, \cos x]$ der kleinste Unterring von von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, welcher die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ und die rationalen Zahlen (aufgefaßt als konstante Funktionen) enthält.

(a) Zeige, daß $\mathbb{Q}[\sin x, \cos x]$ genau aus den Funktionen $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ besteht, welche in der Form
$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$
geschrieben werden können, wobei a_0, a_1, a_2, ... und b_1, b_2, ... rationale Zahlen sind.

(b) Zeige, daß für jedes von Null verschiedene $f \in \mathbb{Q}[\sin x, \cos x]$ eine eindeutig definierte natürliche Zahl $\deg f = n$ existiert, so daß
$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$
mit $a_n \neq 0$ oder $b_n \neq 0$.

(c) Seien f, $g \in \mathbb{Q}[\sin x, \cos x]$. Zeige, daß $\deg(f \cdot g) = (\deg f) + (\deg g)$, wenn wir zusätzlich $\deg 0 = -\infty$ setzen.

(d) Zeige, daß $\mathbb{Q}[\sin x, \cos x]$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring, der genau zwei endlich erzeugte Ideale besitzt. Zeige, daß R ein Körper ist.

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Zeige, daß K genau dann von Charakteristik $n \in \mathbb{N}$ ist, wenn der Kern des (einzigen) Ringhomomorphismus' $\mathbb{Z} \to K$ durch das Hauptideal (n) gegeben ist.
Was gilt in der Situation $n = 0$?

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Zeige, daß der Restklassenring $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ ein Körper mit 9 Elementen ist.

Aufgabe 9. (5 Punkte)
Sei $\phi\colon R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von S. Zeige, daß $\phi^{-1}\mathfrak{b}$ ein Ideal von R ist. Für dieses Ideal schreiben wir auch häufig $R \cap \mathfrak{b}$, wenn der Homomorphismus ϕ aus dem Zusammenhange hervorgeht.
Ist das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus wieder ein Ideal?

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

8. Aufgabenblatt

Algebra II

15. Juni 2011

Aufgabe 1. (Quickies)(3+3 Punkte)

(Q1) Zeige, daß der Restklassenring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(2)$ genau vier Elemente hat. Welche Elemente davon sind regulär?

(Q2) Sei R ein kommutativer Ring. Gib für eine Einheit $f \in R$ einen kanonischen Ringisomorphismus zwischen R und $R[f^{-1}]$ an.

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Zeige für ein Element $f \in R$, daß $R[f^{-1}]$ genau dann der Nullring ist, wenn f in R nilpotent ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Seien f ein Element in R ist und n eine positive natürliche Zahl. Zeige, daß $R[f^{-1}]$ und $R[f^{-n}] = R[(f^n)^{-1}]$ kanonisch isomorph sind.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte)

(a) Sei $s_1, \ldots, s_n$ eine Zerlegung der Eins eines kommutativen Ringes R. Zeige, daß zwei Elemente f und g von R genau dann gleich sind, wenn sie *lokal gleich* sind, das heißt, wenn $f = g$ in $R[s_i^{-1}]$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

(b) Sei $s_1, \ldots, s_n$ eine Zerlegung der Eins eines kommutativen Ringes R. Zeige, daß ein Element f in R genau dann invertierbar ist, wenn es *lokal invertierbar* ist, das heißt, wenn f in $R[s_i^{-1}]$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ invertierbar ist.

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

(I) Sei R ein kommutativer Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Wo gibt es Probleme, wenn die Gleichheit zweier Brüche $\frac{a}{s}$ und $\frac{b}{t}$ nach S einfach durch $at = bs$ definiert wird?

(II) Warum ist es nicht so einfach, Lokalisierungen nicht kommutativer Ringe zu definieren?

Aufgabe 6. (4+4 Punkte)

(a) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $A \in \mathrm{M}_{n,m}(R)$ eine Matrix über R. Mit $(\Lambda^k(A))$ bezeichnen wir das von den k-Minoren von A (das heißt den Determinanten von $(k \times k)$-Untermatrizen) erzeugte Ideal in R. Zeige, daß sich $(\Lambda^k(A))$ nicht ändert, wenn A durch eine zu A ähnliche Matrix ersetzt wird.

(b) Sei K ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eine Matrix über K. Zeige, daß A genau dann Rang r hat, wenn $(\Lambda^r(A)) = (1)$ und $(\Lambda^{r+1}(A) = (0)$ gilt.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

9. Aufgabenblatt

Algebra II

20. Juni 2011

Aufgabe 1. (Staatsexamens-/Klausuraufgaben)(5+5+5+5+5+5 Zusatzpunkte)

(a) Sei R ein kommutativer Ring. Definiere den Begriff eines gerichteten Systems von R-Algebren.

(b) Definiere den gerichteten Limes eines gerichteten Systems von R-Algebren.

(c) Zeige, dass der gerichtete Limes $\varinjlim A_i$ eines gerichteten Systems $(A_i)_{i\in I}$ von R-Algebren wieder eine R-Algebra ist.

(d) Beweise, daß der gerichtete Limes $\varinjlim A_i$ von R-Algebren folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt:
Zu jeder R-Algebra B zusammen mit einer Familie von R-Algebrenhomomorphismen $\psi_i \colon A_i \to B$, welche für alle $i \leq j \in I$ der Gleichung $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$ genügen (ϕ_{ij} bezeichnet hier den Strukturmorphismus des gerichteten Systems $(A_i)_{i\in I}$), gibt es genau einen R-Algebrenhomomorphismus $\psi \colon \varinjlim A_i \to B$.

(e) Zeige: $\varinjlim A_i$ ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

(f) Was bedeudet „kanonisch“ in Aufgabenteil (e)?

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Sei $(R_i)_{i\in I}$ ein gerichtetes System von Ringen mit Limes $R = \varinjlim_{i\in I} R_i$. Zeige, daß ein $x \in R_i$ genau dann in R invertierbar ist, wenn ein $j \geq i$ existiert, so daß x in R_j invertierbar ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Zeige, daß jeder Ring gerichteter Limes endlich erzeugter $\mathbf{Z}$-Algebren ist.

Aufgabe 4. (5 Punkte)
Zeige, daß eine Menge X zusammen mit einer Ordnung genau dann gerichtet ist, wenn jede endliche Teilmenge von X in X eine obere Schranke besitzt.

Aufgabe 5. (7 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Wir sagen für eine natürliche Zahl r, daß eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n,m}(R)$ *Rang* r habe, wenn $(\Lambda^r(A)) = (1)$ und $(\Lambda^{r+1}(A)) = (0)$ gelten.

Habe eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n,m}(R)$ Rang r. Zeige dann, daß eine Zerlegung $f_1, \ldots, f_N$ der Eins von R existiert, so daß für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ die Matrix A über $R[f_i^{-1}]$ (damit meinen wir das kanonische Bild von A in $\mathrm{M}_{n,m}(R[f_i^{-1}])$) ähnlich zu folgender Diagonalmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,m}(R[f_i^{-1}]).$$

Hierbei stehen auf der Diagonalen genau r Stück Einsen.

Wir können also über jedem Ring jede Matrix zumindest lokal in Gauß–Jordansche Normalform bringen. Warum geht dies im allgemeinen nicht global?

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Zeige, daß $3 + 2\mathrm{i}$ ein irreduzibles Element in $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ ist.

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Sei R ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. Sei K sein Quotientenkörper. Wir fassen den Inhalt eines Polynoms über R als Element von K auf. Zeige, daß sich der Inhalt von Polynomen mit Koeffizienten in R auf genau eine Art und Weise auf Polynome mit Koeffizienten in K fortsetzen läßt, so daß sich der Inhalt wie in Hilfssatz 7.88 auf Seite 314 weiterhin multiplikativ verhält.

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich. Sei $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ ein Polynom, so daß 1 ein größter gemeinsamer Teiler aller Koeffizienten von $f(X)$ ist. Sei p ein Primelement von R, welches den Koeffizienten a_n nicht teilt, welches die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ teilt und den Koeffizienten a_0 nicht im Quadrat teilt. Zeige, daß $f(X)$ dann in $R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 9. (5 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Sei N eine natürliche Zahl. Zeige, daß die Einschränkung der Abbildung

$$\phi\colon R[X,Y] \to R[X], \quad f \mapsto f(X, X^N)$$

auf Polynome, deren Grad in X kleiner als N ist, injektiv ist.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

10. Aufgabenblatt

Algebra II

27. Juni 2011

Aufgabe 1. (3+3 Punkte)

(a) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $X^4 + 4Y^4$ im Ringe $\mathbf{Z}[X, Y]$.

(b) Zeige, daß das Polynom $X^2 + Y$ im Ringe $\mathbf{Z}[X, Y]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2. (3+3 Punkte)

(i) Sei R ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. Sei $f \in R$ ein reguläres Element. Zeige, daß $R[f^{-1}]$ ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist.

(ii) Sei R ein faktorieller Ring. Sei $f \in R$ ein reguläres Element. Zeige, daß $R[f^{-1}]$ ein faktorieller Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Sei I ein echtes Ideal in einem kommutativen Ringe R (*echt* heißt dabei, daß $1 \notin I$, das heißt, I ist eine echte Teilmenge von R). Sei $f(X)$ ein normiertes Polynom über R, so daß das Bild von $f(X)$ unter dem kanonischen Ringhomomorphismus

$$R[X] \to R/I[X], \quad f(X) \mapsto f(X)$$

irreduzibel ist. Zeigen Sie, daß dann auch $f(X) \in R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, daß das Ideal (X, Y) in $R[X, Y]$ nicht von einem Elemente erzeugt werden kann.

Aufgabe 5. (3 Punkte)
Bestimme eine teilweise Faktorisierung der drei ganzen Zahlen 99, 1200 und 160.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$f(X, Y) = X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^3 - Y^4$$

und

$$g(X, Y) = X^4Y - X^3Y^2 - X^2Y^2 + XY^3$$

im Ringe $\mathbf{Q}[X, Y]$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Sei $R = \mathbf{Z}[Y, X_1, X_2, \ldots]/I$, wobei I das durch alle Linearkombinationen von $X_{i+1}Y - X_i$ mit $i \geq 1$ gebildete Ideal ist. Zeige, daß R ein Ring mit größten gemeinsamen Teilern ist, welcher nicht die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale erfüllt. Zeige weiter, daß keine teilweise Faktorisierung von Y und X_1 existiert.

Aufgabe 8. (3 Punkte)
Seien a, b und c drei Elemente in einem Ringe mit größten gemeinsamen Teilern. Es teile a das Produkt von b und c, und es sei 1 ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Zeige, daß dann a das Element c teilt.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich, in dem eine teilweise Primfaktorzerlegung immer möglich ist. Zeige, daß R ein Ring mit größten gemeinsamen Teilern ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich, in dem eine teilweise Primfaktorzerlegung immer möglich ist. Zeige, daß R ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist, wenn wir annehmen können, daß wir einen Irreduzibilitätstest für Elemente aus R haben.

Aufgabe 11. (Staatsexamens-/Klausuraufgaben) (6 Zusatzpunkte)
Seien a und b ganze Zahlen. Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel. Definiere

$$N(a + b\,\omega) = a^2 - ab + b^2.$$

Zeige, daß $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\omega)} = \mathbf{Z}[\omega]$ zusammen mit der Abbildung N als Norm ein Euklidischer Ring ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Seien a und b ganze Zahlen. Definiere

$$N(a + b\sqrt{-5}) := a^2 + 5b^2.$$

Zeige, daß $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ zusammen mit der Abbildung N als Norm kein Euklidischer Ring ist.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

11. Aufgabenblatt

Algebra II

04. Juli 2011

Aufgabe 1. (2 Punkte)
Zeige, daß das Nilradikal eines kommutativen Ringes im Schnitt aller seiner Primideale liegt.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $\mathfrak{m}$ ein Ideal in einem kommutativen Ringe R. Zeige, daß $R/\mathfrak{m}$ genau dann ein Körper ist, wenn $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.
Was gilt im Falle eines Primideals (ohne Beweis!)?

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei R ein Bézoutscher Bereich und s ein reguläres Element. Zeige, daß $R[s^{-1}]$ wieder ein Bézoutscher Bereich ist.

Aufgabe 4. (3+2 Punkte)

(a) Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei endlich erzeugte Ideale eines Prüferschen Bereiches. Zeige, daß eine Zerlegung $s_1, \ldots, s_n$ der Eins von R existiert, so daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Ideale $\mathfrak{a}[s_i^{-1}]$ und $\mathfrak{b}[s_i^{-1}]$ in $R[s_i^{-1}]$ Hauptideale sind.

(b) Gib eine Zerlegung der Eins $s_1, \ldots, s_n$ des Zahlringes $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ an, so daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ das Ideal $(7, 1 + \sqrt{-13})$ in $R[s_i^{-1}]$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Sei $s_1, \ldots, s_n$ eine Zerlegung der Eins von R. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, daß $\mathfrak{a}[s_i^{-1}] = (1)$ als Ideale in $R[s_i^{-1}]$. Zeige, daß dann $\mathfrak{a}$ das Einsideal in R ist.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Sei R ein Prüferscher Bereich. Wir wollen ein nicht verschwindendes endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ von R irreduzibel nennen, wenn für jede Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{a}_n$ in endlich erzeugte Ideale von R schon ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$ existiert. Zeige, daß jedes endlich erzeugte irreduzible Ideal von R ein Primideal ist.

Aufgabe 7. (4+4+3 Punkte)

(α) Sei R ein Dedekindscher Bereich. Angenommen, wir haben ein Test, der feststellt, ob ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ in R irreduzibel ist bzw. gegebenenfalls das Ideal in zwei echte Faktoren zerlegt. Zeige, daß sich jedes nicht verschwindende Ideal in R dann bis auf Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben läßt.

(β) Sei R ein Dedekindscher Bereich. Angenommen, wir haben einen Test, der feststellt, ob ein gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ in R ein maximales Ideal ist bzw. gegebenfalls ein Element liefert, um das $\mathfrak{a}$ zu einem echten Ideal erweitert werden kann. Zeige, daß sich jedes nicht verschwindende Ideal in R dann bis auf Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben läßt,

(γ) Gib eine Primidealzerlegung von $1 + \sqrt{-5}$ im Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ an.

Aufgabe 8. (Staatsexamens-/Klausuraufgaben)(5 Zusatzpunkte)
Sei R ein Dedekindscher Bereich. Sei $A \in \mathrm{M}_{n,m}(R)$ eine Matrix. Zeige, daß der Kern von A lokal endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Ein Algorithmus produziere m Ketten

$$\begin{array}{c}\mathfrak{a}_{10} \subseteq \mathfrak{a}_{11} \subseteq \mathfrak{a}_{12} \subseteq \cdots \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{m0} \subseteq \mathfrak{a}_{m1} \subseteq \mathfrak{a}_{m2} \subseteq \cdots\end{array}$$

von Idealen von R. Zeige, daß ein n existiert, so daß $\mathfrak{a}_{jn} = \mathfrak{a}_{j(n+1)}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Sei x eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - X^2 - 3X + 7$ in den algebraischen Zahlen. Sei $K = \mathbb{Q}(x)$. Bestimme eine teilweise Faktorisierung der Ideale $(14, x+7)$ und $(35, x-14)$ in $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Bestimme eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ringes ganzer Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

12. Aufgabenblatt

Algebra II

11. Juli 2011

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Sei $K(x)$ über K eine endliche Körpererweiterung ungeraden Grades. Zeige, daß $K(x) = K(x^2)$.

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Finde ein normiertes irreduzibles Polynom zweiten Gerades über $\mathbb{F}_2$, und gib einen Körper mit vier Elementen an.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei K ein Körper. Sei E ein Zwischenkörper von $K(X)$ über K, der ein echter Oberkörper von K ist, das heißt es liegt ein Element in E, welches nicht in K liegt. Zeige, daß X algebraisch über E ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei K ein Körper. Sei

$$y \coloneqq \frac{g(X)}{h(X)} \in K(X),$$

wobei $g(X)$ und $h(X)$ teilerfremde Polynome in $K[X]$ seien. Sei das Maximum n von $\deg g(X)$ und $\deg h(X)$ mindestens 1. Zeige, daß der Grad von $K(X)$ über $K(y)$ gerade n ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Seien L über K eine Körpererweiterung. Seien E und F zwei Zwischenkörper von L über K. Wir nennen E *linear disjunkt von* F, falls jede endliche Menge von Elementen aus E, welche über K linear unabhängig ist, auch über F linear unabhängig ist.

Zeige, daß diese Relation zwischen E und F symmetrisch in E und F ist, das heißt also, daß E genau dann linear disjunkt von F ist, wenn F linear disjunkt von E ist.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Zerlege das Polynom

$$f(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$$

über $\mathbb{F}_3$ in seine irreduziblen Faktoren.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Sei $f(X)$ ein Polynom über einem endlichen Körper K. Zeige, daß eine endliche Körpererweiterung L von K existiert, über der $f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011

Dipl.-Math. Franz Vogler

13. Aufgabenblatt

Algebra II

18. Juli 2011

Aufgabe 1. **(Quickies)**: (2+2+2+2 Punkte)
Sei R ein Hauptidealbereich und $A := K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über einem Körper K.

(Q1) Zeige, dass R ein Ring mit größten gemeinsamen Teilern ist.

(Q2) Sei $r \in R$ irreduzibel. Beweise, dass das Ideal $(r) \subset R$ ein maximales Ideal ist.

(Q3) Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein endlich erzeugtes Ideal. Inwiefern ist es gerechtfertigt von *dem* Erzeuger von $\mathfrak{a}$ zu sprechen.

(Q4) Sei $A/\mathfrak{a}$ ein Körper. Ist *der* Erzeuger von $\mathfrak{a}$ irreduzibel?

Aufgabe 2. (2 Punkte)
Zeige, daß es außer der trivialen keine weiteren endlichen Untergruppen der Einheitengruppe von $\mathbb{Q}$ existieren.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei N eine natürliche Zahl. Sei K ein faktorieller Körper, der keine endliche Charakteristik kleiner oder gleich N hat. Sei L über K eine endliche Körpererweiterung vom Grade N. Zeige, daß L faktoriell ist.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte)

(a) Sei $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung. Sei $x \in L$ über K separabel. Zeige, daß dann auch x über jeder Zwischenerweiterung E von L über K separabel ist.

(b) Sei $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung. Sei $x \in L$ separabel über einer Zwischenerweiterung E von L über K. Warum ist x im allgemeinen nicht separabel über K?

Aufgabe 5. (4+4 Punkte)

(1) Sei $g(X)$ ein normiertes Polynom über einem Körper K mit $g'(X) = 0$. Warum hat der Körper K die Charakteristik einer Primzahl?

(2) Sei $g(X)$ ein normiertes Polynom über einem Körper K mit $g'(X) = 0$. Warum läßt sich $g(X) = g_1(X^p)$ für eine Primzahl p und ein Polynom $g_1 \in K[X]$ schreiben?

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Sei K ein Körper der Charakteristik einer Primzahl p. Sei L eine Körpererweiterung von K. Sei $x \in L$ mit $K(x) = K(x^p)$. Konstruiere ein separables Polynom über K, welches x als Nullstelle hat.

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Sei $E = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X^2 + 2)$. Schreibe X in E als einen in X^3 rationalen Ausdruck über $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Sei K ein faktorieller Körper. Begründe, warum K genau dann vollkommen ist, wenn jedes irreduzible Polynom über K separabel ist. Welche Richtung gilt noch, wenn wir nicht wissen, ob K faktoriell ist?

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Sei K_0, K_1, K_2, ... eine Folge von Körpern. Seien Körperhomomorphismen $\phi_i \colon K_i \to K_{i+1}$ gegeben, bezüglich derer der gerichtete Limes

$$L = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}_0} K_i$$

gebildet wird. Zeige, daß L ein Körper ist.
Wie kann L in natürlicher Weise als Körpererweiterung für alle Körper K_i aufgefaßt werden?

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2011
Dipl.-Math. Franz Vogler

14. Aufgabenblatt

Algebra II

25. Juli 2011

Abgabe: Aufgabenblatt 14 kann bis zum 24. August um 14:00 Uhr in den Briefkasten eingeworfen werden.
Die Besprechung der Aufgaben und die Rückgabe der Abgaben erfolgt im Klausurenkurs, welcher vom 29. August bis 02. September stattfinden wird.

Aufgabe 1. (Quickies):(5+5+5 Zusatzpunkte)

(Q1) Wieso ist

$$K^{p^{-\infty}}$$

ein sinnvolles Symbol für den vollkommenen Abschluß eines Körpers positiver Charakteristik p?

(Q2) Sei K ein Körper endlicher Charakteristik. Zeige, daß sein Primkörper der kleinste Unterkörper (bezüglich der Inklusionsrelation) von K ist.

(Q3) Gibt es in einem Körper mit 27 Elementen einen Unterkörper mit 9 Elementen?

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Zeige, daß in einem Körper K mit 25 Elementen eine Quadratwurzel $\sqrt{2}$ aus 2 existiert. Gib einen Erzeuger der multiplikativen Gruppe von K der Form $a + b\sqrt{2}$ an, wobei a und $b \in \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Seien p eine Primzahl und n und d positive natürliche Zahlen. Sei $q = p^n$. Sei L ein Körper mit q^d Elementen und K sein Unterkörper mit q Elementen. Zeige, daß die Gruppe der Automorphismen von L als K-Algebra von Frob^n erzeugt wird und d Elemente besitzt.

Aufgabe 4. (Spezialistenaufgabe):(10 Zusatzpunkte)
Sei R ein kommutativer Ring positiver Charakteristik p, das heißt R ist nicht der Nullring und $p = 0$ in R. Sei

$$\varprojlim_{i \in \mathbb{N}_0} R^{p^i}$$

die Menge aller Folgen $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit $x_i \in R$ und $x_{i+1}^p = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Durch gliedweise Addition und Multiplikation der Folgen wird $E := \varprojlim_i R^{p^i}$ zu einem kommutativen Ring. Zeige, daß in E jedes Element eine p-te Wurzel besitzt.

Zeige, daß unter der Voraussetzung, daß R ein Körper ist, der Ring E vermöge der Abbildung

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto x_0$$

zu einem vollkommenen Unterkörper von R wird und mit denjenigen Elementen in R identifiziert werden kann, die alle q-ten Wurzel besitzen, wobei q eine beliebige p-Potenz ist.

Im allgemeinen heißt der Ring E heißt die *Vervollkommnung von R*.

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Gib die siebenten Wurzeln aller Elemente von $\mathbb{F}_7$ an.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Sei K ein Körper positiver Charakteristik p. Zeige, daß K genau dann vollkommen ist, wenn der Frobenius von K ein Isomorphismus von K auf sich selbst ist.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Sei L eine Körpererweiterung eines Körpers K. Zeige, daß die Menge der über K rein inseparablen Elemente in L eine Zwischenerweiterung von L über K ist.

Aufgabe 8. (6 Punkte)
Sei L eine endliche Körpererweiterung eines Körpers K. Sei L über K sowohl separabel als auch rein inseparabel. Zeige, daß $L = K$.

Aufgabe 9. (6 Punkte)
Sei L über K eine endliche Körpererweiterung. Sei $x \in L$ separabel über K und $y \in L$ rein inseparabel über K. Zeige, daß $K(x, y) = K(x + y)$.

Aufgabe 10. (Staatsexamens-/Klausuraufgaben)(10+10 Zusatzpunkte)

(a) Sei L über K eine endliche Körpererweiterung. Die *Norm*

$$N_{L/K}(x)$$

eines Elementes x in L über K ist als die Determinante der K-linearen Abbildung von L nach L definiert, die durch Multiplikation mit x gegeben ist. Zeige, daß

$$N_{L/K}(x) = \left(\prod_{i=1}^{[L:K]_\mathrm{s}} x_i \right)^{[L:K]_\mathrm{i}},$$

wobei die x_i die verschiedenen galoisschen Konjugierten von x in einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper Ω von K sind.

(b) Sei L über K eine endliche Körpererweiterung. Sei E ein über K endlicher Zwischenkörper. Zeige, daß

$$\mathrm{disc}_{L/K} = N_{E/K}(\mathrm{disc}_{L/E}) \cdot \mathrm{disc}_{E/K}^{[L:E]}.$$