Aufgabe 10

Sei $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine Nullstelle von $f = X^4 - X^2 - 3X + 7$, sei $K = \mathbb{Q}(x)$. Es gilt $7 = x(3 + x - x^3)$, diese Tatsache werden wir mehrmals benutzen.

Wir suchen eine teilweise Faktorisierung der Ideale $\mathfrak{a} := (14, x + 7)$ und $\mathfrak{b} := (35, x - 14)$ in $\mathcal{O}_K$, dazu gehen wir nach dem Verfahren von Seite 327 des Skripts vor. Glücklicherweise terminiert das Verfahren schon nach dem ersten Schritt.

Das Resultat ist:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{d} \cdot \tilde{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{d} \cdot \tilde{\mathfrak{b}},$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} &:= \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (14, x + 7, 35, x - 14) = (14, 7, 35, x) = (7, x) \\
&= (x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{a}} &:= \mathfrak{a} : \mathfrak{d} = (2 \cdot 7, x + 7) : (x) = (2x(3 + x - x^3), x(4 + x - x^3)) : (x) \\
&= (2(4 + x - x^3) - 2, 4 + x - x^3) = (2, 4 + x - x^3) \\
&= (2, x - x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{b}} &:= \mathfrak{b} : \mathfrak{d} = (5 \cdot 7, x - 2 \cdot 7) : (x) = (5x(3 + x - x^3), x - 2x(3 + x - x^3)) : (x) \\
&= (5 \cdot (3 + x - x^3), 1 - 2 \cdot (3 + x - x^3)) = (5 + x - x^3, -5 - 2x + 2x^3) \\
&= (5 + x - x^3, -x + x^3) \\
&= (5, x - x^3)
\end{aligned}$$

Denn die Ideale $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\tilde{\mathfrak{b}}$ sind direkt nach Konstruktion koprim, und für die restlichen beiden Kombinationen gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{d} &= (2, x - x^3, x) = (2, x) = (2, x, x(3 + x - x^3)) = (2, x, 7) = (1) \\
\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{d} &= (5, x - x^3, x) = (5, x) = (5, x, x(3 + x - x^3)) = (5, x, 7) = (1)
\end{aligned}$$

Bemerkung zum Vorgehen: Alle auftretenden Ideale möglichst gut vereinfachen, die Rechenregel fürs Teilen durch Hauptideale verwenden, die Darstellung des konstanten Glieds von f nutzen.