Aufgabe 4(b)

Gesucht: Zerlegung der Eins in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ derart, dass das Ideal $(7, u)$ mit $u := 1 + \sqrt{-13}$ in den lokalisierten Ringen jeweils ein Hauptideal ist.

Es gilt $u \cdot \overline{u} = (1 + \sqrt{-13}) \cdot (1 - \sqrt{-13}) = 1 + 13 = 14$.

Dazu: Wir wählen $1 = 8 + (-7)$ als Zerlegung der Eins. In $R[8^{-1}]$ gilt dann

$$(7, u) = (14, u) = (u\overline{u}, u) = (u),$$

wobei der erste Schritt deswegen folgt, weil mit 8 auch 2 in $R[8^{-1}]$ invertierbar ist, und in $R[(-7)^{-1}]$ gilt

$$(7, u) = (1),$$

da 7 in $R[(-7)^{-1}]$ invertierbar ist.

Bemerkung zum Vorgehen: Die Zahl u erfüllt die Beziehung $u^2 - 2u + 14 = 0$, daher gilt $2 \cdot 7 = 14 = 2u - u^2$. So kann man zum Gedanken geleitet werden, dass es gut wäre, wenn die Zahl 2 invertierbar wäre, denn dann wäre 7 einfach ein Vielfaches von u (nämlich das $(u - u^2/2)$-fache).

Nun benötigt man für eine nichttriviale Zerlegung der Eins natürlich mindestens zwei Zahlen, die dann in den lokalisierten Ringen invertierbar sein sollen und sich zur Eins aufaddieren müssen. Daher kann man sich auf die Suche nach einer zu 2 teilerfremden Zahl begeben, denn teilerfremde ganze Zahlen induzieren ja eine Darstellung der Eins.

Ein Beispiel für eine Zahl, welche teilerfremd zu 2 ist, ist 7. Diese hat den schönen Nebeneffekt, dass es gut ist, wenn sie invertierbar ist, denn dann wird das Ideal zum Einsideal. Eine durch die Teilerfremdheit von 2 und 7 induzierte Darstellung der Eins ist $1 = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 7$, das ist dann die gewünschte Zerlegung.