Aufgabe 8

Sei R ein prüferscher Bereich, welcher nicht notwendigerweise noethersch ist. Wir benötigen folgende Vorüberlegung:

Behauptung. *Seien $x, y \in R$ zwei beliebige Elemente. Dann gibt es eine Zerlegung $1 = s_1 + \cdots + s_N$ der Eins derart, dass in den lokalisierten Ringen $R[s_i^{-1}]$ jeweils gilt:*

$$x \mid y \quad \textit{oder} \quad y \mid x.$$

Beweis. Wenn x oder y null sind (das können wir prüfen, da R ein Integritätsbereich ist), ist die Behauptung mit der trivialen Zerlegung $1 = 1$ klar.

Zum endlich erzeugten Ideal (x, y) gibt es eine Zerlegung $1 = t_1 + \cdots + t_n$ derart, dass die Erweiterungen dieses Ideals in den lokalisisierten Ringen $R[t_i^{-1}]$ jeweils Hauptideale (d_i) sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass alle t_i regulär sind. (Da R ein Integritätsbereich ist, können wir auf Regularität prüfen.)

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ können wir somit Multiplikatoren $a_i, b_i \in R[t_i^{-1}]$ und $u_i, v_i \in R[t_i^{-1}]$ derart finden, dass

$$\begin{aligned} d_i &= a_i x + b_i y \\ x &= u_i d_i \\ y &= v_i d_i \end{aligned}$$

gilt. Da $d_i \neq 0$ und $R[t_i^{-1}]$ auch ein Integritätsbereich ist, können wir

$$1 = a_i u_i + b_i v_i$$

zeigen. Im erneut lokalisierten Ring $R[t_i^{-1}][(a_i u_i)^{-1}]$ ist u_i invertierbar, somit x assoziiert zu d_i und somit x ein Teiler von y. Analog ist y in $R[t_i^{-1}][(b_i v_i)^{-1}]$ ein Teiler von x.

Zu jedem i erhalten wir also jeweils eine Zerlegung der Eins des lokalisierten Rings $R[t_i^{-1}]$. Diese können wir zu einer Zerlegung $1 = s_1 + \cdots + s_{2n}$ der Eins von R zusammenfassen; es gilt dann für alle $j = 1, \ldots, 2n$ jeweils

$$x \mid y \quad \text{oder} \quad y \mid x$$

in $R[s_j]$, das war zu zeigen. $\square$

Als Korollar ergibt sich:

Behauptung. *Seien $x_1, \ldots, x_m \in R$ gegebene Ringelemente. Dann gibt es eine Zerlegung der Eins derart, dass in den lokalisierten Ringen jeweils eines der Elemente ein Teiler aller anderen ist.*

Beweis. (durch Induktion)

Induktionsanfang $m = 1$: Klar.

Induktionsschritt $m \to m+1$: Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $x_1, \ldots, x_m$ an und betrachten einen festen der sich dadurch ergebenden lokalisierten Ringe. Es sei darin x_j ein Teiler aller $x_1, \ldots, x_m$. Nach der Vorüberlegung finden wir eine Zerlegung der Eins, sodass in den weiter lokalisierten Ringen x_j ein Teiler von x_{m+1} ist oder umgekehrt. In beiden Fällen sind wir fertig. □

Sei $A \in M_{n,m}(R)$ eine Matrix.

Behauptung. *Der Kern von A ist lokal endlich erzeugt.*

Beweis.

1. Ganz allgemein, unabhängig von den Eigenschaften von R, gilt für jede multiplikative Menge $S \subseteq R$:

   $$\ker(A \in M_{n,m}(R[S^{-1}])) \cong (\ker A)[S^{-1}]$$

   Ein Isomorphismus ist durch

   $$\frac{x}{s} \longmapsto \frac{x}{s}$$

   gegeben: Wohldefiniertheit, Injektivität und Homomorphieeigenschaft kann man sich schnell überlegen. Zur Surjektivität sei ein beliebiges Element $\frac{y}{s}$ der rechten Seite vorgegeben. Da $A\frac{y}{s} = \frac{Ay}{s} = 0$, gibt es ein $u \in S$ mit $uAy = 0$, also mit $A(uy) = 0$. Somit gilt $\frac{y}{s} = \frac{uy}{us}$ und $\frac{uy}{us}$ ist ein Element der linken Seite, da uy im Kern von A liegt.

   Diese Vorüberlegung erlaubt folgende Schlussweise: Um zu zeigen, dass der Kern von A lokal endlich erzeugt ist, genügt es, eine Zerlegung der Eins derart anzugeben, dass die Kern der Bilder der Matrizen über den lokalisierten Ringen endlich erzeugt sind.

2. Über beliebigen Integritätsbereichen sind Kerne von (rechteckigen) Diagonalmatrizen stets endlich erzeugt, nämlich genau durch diejenigen Standardeinheitsvektoren e_i, für die der i-te Diagonaleintrag der Matrix null ist.

3. Nun zur eigentlichen Aufgabe. Wir werden eine Zerlegung der Eins finden, sodass über den lokalisierten Ringen A jeweils ähnlich zu Diagonalmatrizen ist.

   Dazu benutzen wir eine starke Vereinfachung des Smithschen Diagonalisierungsverfahrens: Nach der Vorüberlegung finden wir eine Zerlegung der Eins derart, dass in den lokalisierten Ringen jeweils eines der Matrixelemente ein Teiler aller anderen ist. Dieses können wir nach oben links bringen und damit alle anderen Elemente der ersten Zeile und Spalte auslöschen.

   Diesen Schritt können wir für die entstehende Restmatrix rekursiv wiederholen, dabei müssen wir die Zerlegung der Eins immer weiter verfeinern. Nach endlich vielen Schritten sind wir fertig.

□