Aufgabe 9

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Ein Algorithmus produziere m Ketten

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{a}_{10} & \subseteq & \mathfrak{a}_{11} & \subseteq & \mathfrak{a}_{12} & \subseteq & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \mathfrak{a}_{m0} & \subseteq & \mathfrak{a}_{m1} & \subseteq & \mathfrak{a}_{m2} & \subseteq & \cdots \end{array}$$

von endlich erzeugten Idealen in R.

Behauptung. *Es gibt ein n derart, dass*

$$\mathfrak{a}_{jn} = \mathfrak{a}_{j,n+1}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Beweis. (durch Induktion über m)

Induktionsanfang $m = 1$: Klar, da R noethersch.

Induktionsschritt $m \to m + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung können wir algorithmisch eine streng monotone Folge $(i_n)_n$ von Indizes finden, sodass $\mathfrak{a}_{j,i_n} = \mathfrak{a}_{j,i_n+1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $n \geq 1$ gilt.

Genauer geht das so: Als erstes verwenden wir die Induktionsvoraussetzung, um einen Index i_1 mit $\mathfrak{a}_{j,i_1} = \mathfrak{a}_{j,i_1+1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ zu erhalten. Um den nächsten Index i_2 zu finden, wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die Teilfolgen $(\mathfrak{a}_{j,i_1+1+n})_{n\geq 0}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ an (wir schneiden also die ersten $i_1 + 1$ Folgenglieder ab). Wir könnig ewig so fortfahren.

Nun betrachten wir die Teilfolge

$$\mathfrak{a}_{m+1,i_1} \subseteq \mathfrak{a}_{m+1,i_2} \subseteq \mathfrak{a}_{m+1,i_3} \subseteq \cdots$$

von $(\mathfrak{a}_{m+1,n})_n$. Da R noethersch ist, gibt es ein n mit $\mathfrak{a}_{m+1,i_n} = \mathfrak{a}_{m+1,i_{n+1}}$. Somit gilt auch

$$\mathfrak{a}_{m+1,i_n} = \mathfrak{a}_{m+1,i_n+1} = \mathfrak{a}_{m+1,i_n+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{m+1,i_{n+1}-1} = \mathfrak{a}_{m+1,i_{n+1}},$$

da die zwischen Anfang und Ende stehenden Folgenglieder in dieser Aufzählung vom Rand „gesandwicht“ werden. Folglich gilt

$$\mathfrak{a}_{j,i_n} = \mathfrak{a}_{j,i_n+1}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, m + 1\}$, womit der Induktionsschritt abgeschlossen ist. □

Bemerkung. Nach ein bisschen Nachdenken kommt man vielleicht irrtümlicherweise auf die Idee, dass die zu zeigende Behauptung gar nicht stimmt: Betrachte die Gegenbeispielsituation

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}_{10} \subsetneq \mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_{12} \subsetneq \mathfrak{a}_{13} = \mathfrak{a}_{14} \subsetneq \mathfrak{a}_{15} = \mathfrak{a}_{16} \subsetneq \cdots \\ \mathfrak{a}_{20} = \mathfrak{a}_{21} \subsetneq \mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_{23} \subsetneq \mathfrak{a}_{24} = \mathfrak{a}_{25} \subsetneq \mathfrak{a}_{26} = \cdots \end{array}$$

Offensichtlich gibt es dann kein n, für den sowohl $a_{1n} = a_{1,n+1}$ als auch $a_{2n} = a_{2,n+1}$ gilt. Es ist aber auch die Noether-Voraussetzung verletzt, was man an der unendlich aufsteigenden Teilfolge

$$a_{11} \subsetneq a_{13} \subsetneq a_{15} \subsetneq a_{17} \subsetneq \cdots$$

sieht.

Bemerkung. Wir verwenden im Beweis das abzählbare Auswahlaxiom, das ist aber nur ein sprachliches Problem. Genauer:

Das abzählbare Auswahlaxiom ist das Hilfsmittel, was einem erlaubt, aus einer Folge von Algorithmen A_i, die jeweils ein Objekt produzieren, einen Algorithmus zu erhalten, der alle Ergebnisse der gegebenen Algorithmen A_i in einer Folge zusammenfasst und diese zurückgibt.

Von der Berechenbarkeitsperspektive ist klar, dass das Unsinn ist: Denn jeder Algorithmus A_i benötigt von null verschieden Zeit zur Berechnung seines Ergebnisses; wöllte man alle Ergebnisse zu einer Folge zusammenfassen, müsste man zunächst alle Algorithmen A_i ablaufen lassen, das dauert aber unendlich lange.

Im Beweis haben wir für jedes $n \geq 1$ einen Algorithmus beschrieben, der den Index i_n berechnet. Das abzählbare Auswahlaxiom kam ins Spiel, als wir all diese Indizes i_n zu einer Folge $(i_n)_n$ zusammengefasst haben. Das hätten wir aber gar nicht machen müssen. (Auch die gegebenen Ideale $a_{j,0}, a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots$ haben wir sprachlich auch zu einer ganzen Folge $(a_{j,n})_{n \geq 0}$ zusammengefasst, das hätte auch nicht sein müssen.)