Aufgabe 10a

Sei $L \supseteq K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei für $x \in L$ die Abbildung $\varphi_x \colon L \to L$ durch $\varphi_x(a) = ax$ für alle $a \in L$ definiert.

Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{[L:K]_\mathrm{s}} \colon L \to \Omega$ die verschiedenen K-Algebrenhomomorphismen von L in einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper Ω.

Sei $\overline{K}$ der separable Abschluss von K in L.

Wir wollen die Gültigkeit folgender Formel zeigen:

$$N_{L/K}(x) = \det \varphi_x = \left(\prod_{i=1}^{[L:K]_\mathrm{s}} \sigma_i(x) \right)^{[L:K]_\mathrm{i}}.$$

Reduktion auf separable Elemente

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Formel für alle $x \in \overline{K}$ bereits bewiesen worden ist. Sei dann $x \in L$ beliebig. Da L über $\overline{K}$ rein inseparabel ist, können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $x \in \overline{K}$. Dann stimmt die Formel für x nach Annahme.

2. Fall: Die Charakteristik von K ist eine Primzahl p und x^{p^e} liegt in $\overline{K}$ für ein $e \geq 0$. Wegen der Multiplikativität der Determinante folgt dann

$$N_{L/K}(x)^{p^e} = N_{L/K}(x^{p^e}) = \left(\prod_{i=1}^{[L:K]_\mathrm{s}} \sigma_i(x^{p^e}) \right)^{[L:K]_\mathrm{i}} = \left(\left(\prod_{i=1}^{[L:K]_\mathrm{s}} \sigma_i(x) \right)^{[L:K]_\mathrm{i}} \right)^{p^e},$$

wobei die mittlere Gleichheit nach der Annahme folgt. Die Injektivität des Frobenius erlaubt es dann, die Gültigkeit der Formel auch für x zu zeigen.

Der Fall separabler Elemente

Sei nun $x \in \overline{K}$. Da $L \supseteq \overline{K}$ eine endliche Erweiterung ist, besitzt L eine Basis $a_1, \ldots, a_{[L:K]_\mathrm{i}}$ über $\overline{K}$. Da $\overline{K} \supseteq K(x)$ eine endliche Erweiterung ist, besitzt $\overline{K}$ eine Basis $b_1, \ldots, b_d$ über $K(x)$. Und schließlich besitzt $K(x)$ die Basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ über K, wenn n den Grad von x über K bezeichnet.

Nach dem Satz über die Gradformel ist dann eine Basis von L über K durch die $a_i b_j x^k$ gegeben. Da $\varphi_x(a_i b_j x^k) = a_i b_j \, \varphi_x(x^k)$, erhalten wir, dass die Matrix von φ_x bezüglich dieser Basis Blockdiagonalform hat,

$$M := M(\varphi_x; (a_i b_j x^k), (a_i b_j x^k)) = \begin{pmatrix} N & & \\ & \ddots & \\ & & N \end{pmatrix} \in K^{nd[L:K]_\mathrm{i} \times nd[L:K]_\mathrm{i}},$$

wobei N die Matrix der Einschränkung $\varphi_x|_{K(x)}$ bezüglich der Basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ ist. Diese heißt auch *Begleitmatrix von* m_x, wobei $m_x \in K[X]$ das Minimalpolynom von x über K bezeichne, und hat die Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n},$$

wobei $m_x = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0$.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass das charakteristische Polynom dieser Matrix gerade $(-1)^n m_x$ ist. Somit besitzt M als charakteristisches Polynom die Potenz $((-1)^n m_x)^{d[L:K]_\mathrm{i}}$, womit die Formel

$$N_{L/K}(x) = \det M = ((-1)^n m_x(0))^{d[L:K]_\mathrm{i}} = \left(\left(\prod_{\ell=1}^{n} x_i\right)^d\right)^{[L:K]_\mathrm{i}}$$

folgt, wobei $x_1, \ldots, x_n$ die galoisschen Konjugierten von x in Ω, also die Nullstellen von m_x in Ω, seien. Das ist noch nicht die Formel, die wir zeigen sollten, aber auch schon nett!

Umformung auf die Form der Angabe

Wer noch daran interessiert ist, die Formel auf die vorgegebene Form zu bringen, sei auf [1] und [2, Kap. 8.1] verwiesen.

Literatur

[1] K. Conrad. Trace and norm, 2008.

[2] S. Roman. *Field Theory*, volume 158 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 2006.