Vorschlag zu Aufgabe 5 von Blatt 8

Teilaufgabe (I)

R kommutativer Ring, $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossene Menge.

Frage: Welche Probleme hat die Definition

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad at = bs?$$

Dazu: Ganz allgemein erwartet man von einer Definition des Symbols „=“, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, denn diese Eigenschaften verwendet man ständig, wenn man mit Gleichheiten arbeitet.

Die vorgeschlagene Definition führt zwar noch zu einer reflexiven und symmetrischen Relation, allerdings ist die Transitivität im Allgemeinen verletzt:

Gelte $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ und $\frac{b}{t} = \frac{c}{u}$, wir wollen $\frac{a}{s} = \frac{c}{u}$ zeigen.

Nach Voraussetzung wissen wir $at = bs$ und $bu = ct$. Somit gilt die Rechnung

$$t \cdot au = u \cdot at = u \cdot bs = s \cdot bu = s \cdot ct = t \cdot cs.$$

Im Allgemeinen folgt daraus aber nicht die Behauptung $au = cs$, denn im Allgemeinen muss t nicht notwendigerweise regulär sein.

Bem.: Der Grund, wieso die in dieser Aufgabe gegebene Definition im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (also den üblichen Brüchen) doch funktioniert, ist, dass in $\mathbb{Z}$ bis auf die Null alle Zahlen reguläre Elemente sind.

Zur Erinnerung: Denkt man nur an Zahlen, so ist das Konzept der Nicht-Regularität von Ringelementen sicherlich sehr ungewohnt. Bei Matrizen aber kennt man ja da Phänomen, beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe (II)

Frage: Warum ist es nicht so einfach, Lokalisierungen nichtkommutativer Ringe zu definieren?

Dazu: Zunächst mal erscheint die Definition der Gleichheit zweier Brüche der Vorlesung,

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad uat = ubs \text{ für ein } u \in S,$$

im nichtkommutativen Kontext willkürlich: Genauso denkbar wären

1. $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad uat = usb$ für ein $u \in S$,
2. $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad uta = usb$ für ein $u \in S$,

3. $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad uta = ubs$ für ein $u \in S$,
4. $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad :\Leftrightarrow \quad tau = bsu$ für ein $u \in S$,
5. u. s. w.

Keine dieser Definitionen führt zu einer Äquivalenzrelation.

Zum anderen ist nicht mal im Spezialfall, dass s invertierbar ist, klar, was der Bruch $\frac{a}{s}$ bedeuten soll: Sowohl $s^{-1}\,a$ als auch $a\,s^{-1}$ sind denkbar, man spricht von Links- und Rechtsdivision.

Bem.: In der homologischen Algebra definiert man zur Kategorie $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ der Kettenkomplexe mit Objekten in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ die lokalisierte Kategorie $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})[S^{-1}]$ nach der Klasse der sog. Quasiisomorphismen. Da die Verkettung von Abbildungen i. A. nicht kommutativ ist, gibt es dort eine ähnliche Schwierigkeit.