Anmerkung zu Aufgabe 1 von Blatt 9

Zu Teilaufgabe (b): Man kann sich noch überlegen (das ist nicht verlangt, hilft aber für (d)), dass es für alle $j \in I$ kanonisch definierte R-Algebrenhomomorphismen

$$\lambda_j \colon A_j \longrightarrow \varinjlim A_i$$

gibt, welche außerdem die Eigenschaft

$$\lambda_k \circ \phi_{jk} = \lambda_j$$

für alle $j, k \in I$ mit $j \leq k$ erfüllen. Die ϕ_{jk} bezeichnen dabei die Strukturmorphismen des gerichteten Systems $(A_i)_{i \in I}$.

Zu Teilaufgabe (d): Die Aufgabenstellung muss noch leicht verschärft werden, sonst funktioniert (e) nicht. Die eigentlich zu zeigende universelle Eigenschaft lautet: Zu jeder R-Algebra B zusammen mit R-Algebrenhomomorphismen

$$\psi_i \colon A_i \longrightarrow B$$

für alle $i \in I$, welche

$$\psi_j \circ \phi_{ij} = \psi_i$$

für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ erfüllen, gibt es genau einen R-Algebrenhomomorphismus

$$\psi \colon \varinjlim A_i \longrightarrow B$$

mit der Eigenschaft

$$\psi \circ \lambda_i = \psi_i \tag{1}$$

für alle $i \in I$. Dabei bezeichnet λ_i die R-Algebrenhomomorphismen von oben.

Tipp: Man kann die gesuchte Abbildung ψ kanonisch definieren und muss dann nur noch nachrechnen, dass alle geforderten Eigenschaften erfüllt sind. Um die Eindeutigkeit (aus „genau ein") zu zeigen, muss man die Bedingung (1) verwenden.

Zu Teilaufgabe (e): Zu zeigen ist hier: Sei X eine R-Algebra zusammen mit R-Algebrenhomomorphismen

$$\widetilde{\lambda}_i \colon A_i \longrightarrow X$$

für alle $i \in I$, welche

$$\widetilde{\lambda}_j \circ \phi_{ij} = \widetilde{\lambda}_i$$

für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ erfüllen und gelte die universelle Eigenschaft aus (d) (für X). Dann ist X kanonisch isomorph zu $\varinjlim A_i$.

Tipp: Man kann ausnutzen, dass X und $\varinjlim A_i$ beide die (jeweilige) universelle Eigenschaft erfüllen. Auf diese Weise kann man schonmal R-Algebrenhomomorphismen von X nach $\varinjlim A_i$ und umgekehrt erhalten. Dann muss man noch zeigen, dass ihre Verkettung (in beiden Reihenfolgen) die jeweilige Identität ist.