Algebra II, Übung

LVA 401-2004-00 U

Prof. G. Wüstholz, C. Fuchs

Klausur, FS 2011

08.04.2011

Name:..

Gruppe:...

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!
Arbeitszeit: 90 Minuten

1. Wahr oder falsch? Begründe die Antwort.

   a) Das Polynom $X^3 - 5X^2 - 2X + 10 \in \mathbb{Q}[X]$ ist ein Element des Ideals $(X^2 - 2)\mathbb{Q}[X]$.

   b) Die Summe von zwei Polynomen vom Grad 7 ist ein Polynom vom Grad 7.

   c) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ ist ein faktorieller Ring.

   d) Alle Unterkörper eines Körpers haben diesselbe Charakteristik.

   e) Für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}(1 + \sqrt[4]{3})$ gibt es ein $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\alpha = \mathrm{ev}(f)(1 + \sqrt[4]{3})$.

   f) Es gibt keinen Körper in dem das Polynom $\sqrt{\pi}X^5 + iX^4 - (1+\sqrt[3]{2})X^3 + e^3X^2 + \sqrt[5]{7}X + \sqrt{17}$ in Linearfaktoren zerfällt.

   g) $\mathbb{Q}[X]/((X^2 - 4)\mathbb{Q}[X])$ ist ein Körper.

   h) Falls α und β den selben Grad über K haben, dann sind $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ als Körper isomorph.

   i) Das Polynom $X^3 - 2X^2 + X \in \mathbb{Q}[X]$ ist inseparable über $\mathbb{Q}$.

   j) Falls E eine nicht-algebraische Erweiterung von K ist, dann ist jedes Element $\alpha \in E \backslash K$ transzendent über K.

2. a) Berechne den ggT von $X^2 - X - 2$ und $X^3 - 7X + 6$ in $\mathbb{Q}[X]$ und stelle ihn als Linearkombination der beiden Polynome dar. Verifiziere die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle durch Berechnung der Resultante.

   b) Zeige: $T^2 + X^2 - 1 \in K(X)[T]$ ist irreduzibel über $K(X)$ falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und reduzibel sonst.

3. a) Für jedes $k \in \mathbb{Q}, k \neq 0$, sei $\alpha = \sqrt{2} + k\sqrt{3}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Gib das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$ an. Berechne alle Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

   b) Berechne die Grade der folgenden Körpererweiterungen und gib jeweils eine Basis an: $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \supseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \supseteq \mathbb{Q}$.

4. a) Sei $K(\alpha) \supseteq K$ eine endliche Erweiterung mit ungeradem Grad. Zeige, dass $K(\alpha^2) = K(\alpha)$.

   b) Sei K ein Körper mit Charakteristik 0 und $E \supseteq K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Zeige, dass $E = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in E$ mit $\alpha^2 \in K$.