# Blatt 2, Aufgabe 4

Sei $G$ eine Gruppe.

**Behauptung.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

($\alpha$) *$G$ ist abelsch.*

($\beta$) $(ab)^2 = a^2b^2$ *für alle* $a, b \in G$.

($\gamma$) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ *für alle* $a, b \in G$.

*Beweis.* „($\alpha$) $\Rightarrow$ ($\beta$)“: Seien $a, b \in G$ beliebig. Dann gilt

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = abab \overset{(\star)}{=} aabb = a^2b^2,$$

wobei in Schritt ($\star$) die Voraussetzung der Kommutativität von $G$ eingeht.

„($\beta$) $\Rightarrow$ ($\alpha$)“: Seien $a, b \in G$ beliebig. Dann gilt

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad abab = aabb \quad \overset{(\diamond)}{\Rightarrow} \quad ba = ab,$$

wobei wir in Schritt ($\diamond$) zuerst das $a$ von links und dann das $b$ von rechts gekürzt haben. (Dass man das machen kann, sagt die sog. Kürzungsregel. Man kann den Schritt auch noch anders begründen, nämlich durch Multiplikation mit $a^{-1}$ von links und $b^{-1}$ von rechts.)

„($\alpha$) $\Rightarrow$ ($\gamma$)“: Seien $a, b \in G$ beliebig. Dann gilt

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

wobei der erste Schritt eine allgemeingültige Rechenregel in Gruppen ist (wurde in der Vorlesung bewiesen) und im zweiten Schritt die Voraussetzung eingeht.

„($\gamma$) $\Rightarrow$ ($\alpha$)“: Seien $a, b \in G$ beliebig. Dann folgt aus der Gleichung $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ durch Invertieren von linker und rechter Seite die Rechnung

$$ab = ((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}\,(a^{-1})^{-1} = ba. \qquad \square$$