

Warnung zu Blatt 3, Aufgabe 3

In der Globalübung wurden folgende zwei Aussagen gezeigt:

1. Sind x und g beliebige Elemente einer beliebigen Gruppe, so ist $g^{-1}xg$ von derselben Ordnung wie x .
2. Speziell in Permutationsgruppen $S(n)$ sind Zyklen der Länge k Elemente von Ordnung k .

Daraus folgt aber noch nicht folgende Behauptung:

Behauptung. *Ist $\xi \in S(n)$ ein Zyklus der Länge k und $\pi \in S(n)$ beliebig, so ist auch $\pi^{-1}\xi\pi \in S(n)$ ein Zyklus der Länge k .*

Nach 2. gilt zwar, dass ein solches ξ ein Element der Ordnung k ist, womit nach 1. auch $\pi^{-1}\xi\pi$ ein Element der Ordnung k ist; daraus folgt aber noch nicht, dass $\pi^{-1}\xi\pi$ wirklich ein Zyklus der Länge k ist!

Das liegt daran, dass die Umkehrung in 2. nicht gilt. Es gibt also in $S(n)$ Permutationen der Ordnung k , die nicht Zyklen der Länge k sind: Zum Beispiel hat

$$\sigma := (1\ 2)(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S(4)$$

Ordnung 2, da

$$\sigma^1 \neq e \quad \text{und} \quad \sigma^2 = e,$$

aber σ selbst ist kein Zyklus der Länge 2.