Blatt 3, Aufgabe 4

Sei die Teilmenge

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen definiert.

Behauptung (a)**.** *Bezüglich der Matrizenaddition ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Gruppe.*

Beweis. Dazu müssen wir die Gruppenaxiome nachrechnen.

0. *Abgeschlossenheit:* Die Summe beliebiger Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ liegt wieder in $\mathcal{C}$, denn
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\tilde{x} & -(y+\tilde{y}) \\ y+\tilde{y} & x+\tilde{x} \end{pmatrix}$$
ist von der geforderten Form.
1. *Neutrales Element:* Die Nullmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegt in $\mathcal{C}$ und ist linksneutral, da für alle $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$
$$\begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+x & -(0+y) \\ 0+y & 0+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$
2. *Assoziativität:* Für beliebige $M, \widetilde{M}, \widetilde{\widetilde{M}} \in \mathcal{C}$ gilt $(M+\widetilde{M})+\widetilde{\widetilde{M}} = M+(\widetilde{M}+\widetilde{\widetilde{M}})$, da allgemein die Matrizenaddition assoziativ ist.[1]
3. *Inverse Elemente:* Zu einer beliebigen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ liegt die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -x & -(-y) \\ -y & -x \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathcal{C}$ und ist linksinvers:
$$\begin{pmatrix} -x & -(-y) \\ -y & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+x & -(-y+y) \\ -y+y & -x+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. *Kommutativität:* Für alle Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ gilt
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\tilde{x} & -(y+\tilde{y}) \\ y+\tilde{y} & x+\tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}+x & -(\tilde{y}+y) \\ \tilde{y}+y & \tilde{x}+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

$\square$

Behauptung (b)**.** *Bezüglich der Matrizenmultiplikation ist $\mathcal{C}$ keine Gruppe.*

Beweis. Wir müssen wieder die Gruppenaxiome prüfen.

0. *Abgeschlossenheit:* Das Produkt beliebiger Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ liegt wieder in $\mathcal{C}$, denn
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\tilde{x} - y\tilde{y} & -(y\tilde{x} + x\tilde{y}) \\ y\tilde{x} + x\tilde{y} & x\tilde{x} - y\tilde{y} \end{pmatrix}$$
ist von der geforderten Form.

[1] Wenn man noch keinen Beweis dazu gesehen hat, kann man die Gleichheit auch nachrechnen.

1. *Neutrales Element:* Die Einheitsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ liegt in $\mathcal{C}$ und ist linksneutral, da für alle $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$
$$\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$
2. *Assoziativität:* Für beliebige $M, \widetilde{M}, \widetilde{\widetilde{M}} \in \mathcal{C}$ gilt $(M\widetilde{M})\widetilde{\widetilde{M}} = M(\widetilde{M}\widetilde{\widetilde{M}})$, da allgemein die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.[1]
3. *Inverse Elemente:* Die Nullmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt kein Inverses, obwohl sie in $\mathcal{C}$ liegt. Das sieht man so: Wenn eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ linksinvers zur Nullmatrix wäre, würde
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gelten, was aber nicht stimmt. (Alternativ kann man auch bekanntes Lineare-Algebra-Wissen zitieren.)
4. *Kommutativität:* Für alle Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C}$ gilt
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\tilde{x} - y\tilde{y} & -(y\tilde{x} + x\tilde{y}) \\ y\tilde{x} + x\tilde{y} & x\tilde{x} - y\tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}x - \tilde{y}y & -(\tilde{y}x + \tilde{x}y) \\ \tilde{y}x + \tilde{x}y & \tilde{x}x - \tilde{y}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Zusammengenommen ist also $\mathcal{C}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation keine Gruppe. Unsere Rechnungen zeigen aber, dass zumindest $\mathcal{C} \setminus \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ eine Gruppe ist. Diese ist sogar abelsch, obwohl die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist. □

Bezeichne $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ die Menge der komplexen Zahlen. Wir definieren die Abbildung
$$F\colon \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ a + \mathrm{i}b & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right). \end{array}$$

Behauptung (c1)**.** *Die Abbildung F ist $\mathbb{R}$-linear.*

Beweis. Hierzu sind zwei Aussagen zu zeigen:

1. Für beliebige Elemente $z = a + \mathrm{i}b, \tilde{z} = \tilde{a} + \mathrm{i}\tilde{b} \in \mathbb{C}$ gilt
$$F(z+\tilde{z}) = F((a+\tilde{a})+\mathrm{i}(b+\tilde{b})) = \begin{pmatrix} a+\tilde{a} & -(b+\tilde{b}) \\ b+\tilde{b} & a+\tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{a} & -\tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} = F(z)+F(\tilde{z}).$$
2. Für jedes Element $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ und für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt
$$F(rz) = F(ra + \mathrm{i}rb) = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r\,F(z).$$ □

Behauptung (c2)**.** *Die Abbildung F ist multiplikationstreu.*

Beweis. Für beliebige Elemente $z = a + \mathrm{i}b, \tilde{z} = \tilde{a} + \mathrm{i}\tilde{b} \in \mathbb{C}$ gilt
$$F(z\tilde{z}) = F((a\tilde{a}-b\tilde{b})+\mathrm{i}(b\tilde{a}+a\tilde{b})) = \begin{pmatrix} a\tilde{a} - b\tilde{b} & -(b\tilde{a} + a\tilde{b}) \\ b\tilde{a} + a\tilde{b} & a\tilde{a} - b\tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & -\tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} = F(z)\,F(\tilde{z}).$$
□