Blatt 4, Aufgabe 2

Bei dieser Aufgabe ging es darum, von vier gegebenen Abbildungen zu prüfen, ob sie linear sind. Am einfachsten geht das, indem man stur die Definition von Linearität nachrechnet. Hier folgt eine schwierigere, dafür schnellere Lösung.

Behauptung. *Die Abbildung* $A_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, u \mapsto M_1 u$, *wobei* M_1 *die Matrix*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

bezeichnet, ist linear.

Beweis. Klar, da die Multiplikation mit einer festen Matrix stets linear ist. □

Behauptung. *Die Abbildung*

$$A_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

ist nicht linear.

Beweis. Jede lineare Abbildung bildet den Nullvektor des Definitionsraums auf den Nullvektor des Zielraums ab. Die Abbildung A_2 tut das aber nicht, da $A_2(0) = (1,1,1)^T \neq 0$, und ist somit nicht linear. □

Behauptung. *Die Abbildung* $A_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u \mapsto M_3 u$, *wobei* M_3 *die Matrix*

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

bezeichnet, ist linear.

Beweis. Klar, da die Multiplikation mit einer festen Matrix stets linear ist. □

Behauptung. *Die Abbildung* $A_4 := A_1 \circ A_3$ *ist linear.*

Beweis. Klar, da die Verkettung linearer Abbildungen stets linear ist. □

Die Matrix von A_4 ergibt sich übrigens als das Produkt der Matrizen von A_1 und A_3, ist also

$$M_1 M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$