Blatt 5, Aufgabe 4(b)

Sei G eine Gruppe und $Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\} \subset G$.

Behauptung. *Die Teilmenge $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.*

Beweis. Zunächst müssen wir zeigen, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist:

1. Es gilt $e \in Z(G)$, denn $eh = he$ für alle $h \in G$.
2. Zu $g, \tilde{g} \in Z(G)$ liegt auch $g\tilde{g}$ in $Z(G)$, da $(g\tilde{g})h = gh\tilde{g} = h(g\tilde{g})$ für alle $h \in G$.
3. Zu $g \in Z(g)$ liegt auch g^{-1} in $Z(G)$, da $g^{-1}h = (h^{-1}g)^{-1} = (gh^{-1})^{-1} = hg^{-1}$ für alle $h \in G$.

Zum Nachweis der Normalteilereigenschaft sei nun ein beliebiges $g \in Z(g)$ und $h \in G$ gegeben. Dann liegt in der Tat $h^{-1}gh$ in $Z(g)$, denn $h^{-1}gh = h^{-1}hg = g$. □

Blatt 4, Aufgabe 4(c)

Behauptung. *Die Kerne der Gruppenhomomorphismen sind genau die Normalteiler.*

Beweis. Wir müssen zwei Teilaussagen zeigen:

1. Der Kern eines jeden Gruppenhomomorphismus ist ein Normalteiler.
2. Jeder Normalteiler ist der Kern irgendeines Gruppenhomomorphismus.

Zu 1.: Sei $\varphi\colon G \to H$ ein beliebiger Gruppenhomomorphismus. Dass $\ker\varphi$ eine Untergruppe von G ist, wurde schon in der Vorlesung gezeigt. Zum Nachweis der Normalteilereigenschaft sei ein beliebiges $u \in \ker\varphi$ und $g \in G$ gegeben. Dann liegt auch $g^{-1}ug$ in $\ker\varphi$, denn $\varphi(g^{-1}ug) = \varphi(g)^{-1}\,\varphi(u)\,\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\,e\,\varphi(g) = e$.

Zu 2.: Sei G irgendeine Gruppe und N irgendein Normalteiler von G. Dann gibt es (nach Vorlesung) die Quotientengruppe G/N und die kanonische Projektionsabbildung $\pi\colon G \to G/N, g \mapsto [g]$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Kern dieser Abbildung gerade N ist. □