Blatt 5, Aufgabe 5

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Außerdem gelte $N \subset U$.

Zur Erinnerung: Die Elemente von U/N sind Äquivalenzklassen von Elementen aus U bzgl. der Äquivalenzrelation $u \sim v :\Leftrightarrow u^{-1}v \in N$. Die zu $u \in U$ gehörige Äquivalenzklasse schreibt man als $[u] \in U/N$ und aus der Vorlesung ist bekannt, dass $[u] = uN := \{un \,|\, n \in N\}$ gilt.

Ferner wurde in der Vorlesung gezeigt, dass U/N eine Gruppe wird, wenn man $uN \cdot vN := (uv)N$ für $uN, vN \in U/N$ definiert und wenn N ein Normalteiler von U ist.

Behauptung (a1)**.** *N ist ein Normalteiler von U.*

Beweis. Klar ist, dass N die Untergruppenaxiome bezüglich U als Obergruppe erfüllt: Denn N erfüllt die Untergruppenaxiome bezüglich G als Obergruppe, und die Verknüpfung, das neutrale Element und die inversen Elemente von U sind dieselben wie die von G.

Zum Nachweis der Normalteilereigenschaft seien $n \in N$ und $u \in U$ beliebig gegeben. Dann liegt in der Tat $u^{-1}\, n\, u$ in N, da $u \in G$ und N ein Normalteiler in G ist. $\square$

Behauptung (a2)**.** *U/N ist eine Untergruppe von G/N.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass U/N eine Teilmenge von G/N ist (das ist nämlich nicht offensichtlich). Sei also ein beliebiges Element x aus U/N gegeben. Dieses muss von der Form $x = uN$ sein, wobei u ein Element aus U ist. Also gilt auch $x \in G/N$.

Nun zeigen wir, dass die Gruppenverknüpfung auf U/N die Einschränkung der Verknüpfung auf G/N ist. Seien also $x, y \in U/N$ beliebig gegeben. Dann gibt es $u, v \in U$ mit $x = uN, y = vN$. Das Produkt von x und y in der Gruppe U/N ist dann definitionsgemäß $(xy)N$. Das Produkt von x und y in der Gruppe G/N ist nach Definition ebenfalls $(xy)N$, also stimmen die beiden Produkte überein. $\square$

Sei nun auch U ein Normalteiler von G.

Behauptung (b1)**.** *U/N ist ein Normalteiler von G/N.*

Beweis. Dass U/N eine Untergruppe von G/N ist, haben wir eben schon gesehen. Seien jetzt zum Nachweis der Normalteilereigenschaft $[u] \in U/N$ und $[g] \in G/N$ beliebig gegeben. Dann liegt $[g]^{-1}\,[u]\,[g] = [g^{-1}ug]$ in der Tat in U/N, da $g^{-1}ug \in U$, da U ein Normalteiler von G ist. $\square$

Folglich ist $(G/N)/(U/N)$ eine Gruppe.

Behauptung (b2)**.** *Die Gruppen G/U und $(G/N)/(U/N)$ sind zueinander isomorph (d. h. es gibt einen bijektiven Gruppenhomomorphismus zwischen den beiden Gruppen).*

Beweis. Dazu gibt es zwei Varianten, ohne und mit Homomorphiesatz.

Ohne Homomorphiesatz. Wir geben direkt den gesuchten Gruppenisomorphismus an:

$$\begin{aligned} \psi\colon \quad G/U &\longrightarrow (G/N)/(U/N) \\ [g]_U &\longmapsto [\,[g]_N\,]_{U/N} \end{aligned}$$

Die einzelnen Symbole haben dabei folgende Bedeutung:

- Zu $g \in G$ bezeichnet $[g]_U$ die Äquivalenzklasse von g in der Gruppe G/U, es gilt also $[g]_U = gU$.
- Zu $g \in G$ bezeichnet $[g]_N$ die Äquivalenzklasse von g in der Gruppe G/N, also $[g]_N = gN$.
- Zu $p \in G/N$ bezeichnet $[p]_{U/N}$ die Äquivalenzklasse von p in der Gruppe $(G/N)/(U/N)$, also $[p]_{G/N} = p\,(U/N)$.

Wir müssen zeigen, dass ψ wohldefiniert, bijektiv und ein Gruppenhomomorphismus ist.

1. Zur Wohldefiniertheit: Gelte $g \sim_U g'$ für $g, g' \in G$, also $g^{-1}g' \in U$. Dann gilt auch $[g]_N \sim_{U/N} [g']_N$, denn $([g]_N)^{-1}[g']_N = [g^{-1}g']_N \in U/N$.
2. Zur Injektivität: Seien $[g]_U, [g']_U \in G/U$ mit $\psi([g]) = \psi([g'])$ gegeben. Dann gilt also $([g]_N)^{-1}[g']_N = [g^{-1}g'] \in U/N$, also liegt $g^{-1}g'$ in U. Damit folgt $[g]_U = [g']_U$.
3. Zur Surjektivität: Sei ein $y \in (G/N)/(U/N)$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $p \in G/N$ mit $y = [p]_{U/N}$. Ferner gibt es zu p ein $g \in G$ mit $p = [g]_N$. Also gilt für $x := [g] \in G/U$, dass $\psi(x) = [\,[g]_N\,]_{U/N} = y$.
4. Zur Homomorphieeigenschaft: Seien $[g]_U, [g']_U \in G/U$ beliebig gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi([g]_U \cdot [g']_U) &= \psi([gg']_U) = [\,[gg']_N\,]_{U/N} \\ &= [\,[g]_N \cdot [g']_N\,]_{U/N} = [\,[g]_N\,]_{U/N} \cdot [\,[g']_N\,]_{U/N} \\ &= \psi([g]_U) \cdot \psi([g']_U). \end{aligned}$$

Mit Homomorphiesatz. Wir definieren

$$\begin{aligned} \theta\colon \quad G &\longrightarrow (G/N)/(U/N) \\ g &\longmapsto [\,[g]_N\,]_{U/N}. \end{aligned}$$

Dann kann man nachrechnen, dass θ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker\theta = U$ ist. Nach dem Homomorphiesatz ist dann

$$\begin{aligned} \bar{\theta}\colon \quad G/U &\longrightarrow (G/N)/(U/N) \\ [g]_U &\longmapsto \theta(g) = [\,[g]_N\,]_{U/N} \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus. □

Bemerkung. Der Isomorphismus aus dem Homomorphiesatz stimmt also mit dem explizit angegebenen Gruppenisomorphismus überein. Außerdem sind die Nachweise, die man in den beiden Beweisvarianten erbringen muss, gleich viele und etwa gleich schwer.