

Kurzaufgaben zur Körpertheorie

1. Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt{7}$ über \mathbb{Q} ?
2. Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt{9}$ über \mathbb{Q} ?
3. Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
4. Welchen Grad hat $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ über \mathbb{Q} ?
5. Welchen Grad hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
6. Welchen Grad hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ über \mathbb{Q} ?
7. Was ist eine $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$?
8. Was ist eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$?
9. Ist die imaginäre Einheit i in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthalten?
10. Ist $\sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthalten?
11. Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$.
Tipp: Zeige dazu, dass zum einen $\sqrt{2}$ und i in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$ enthalten sind (was ist $(\sqrt{2} + i)^2$ und $(\sqrt{2} + i)^3$?) und zum anderen $\sqrt{2} + i$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ liegt.
Warnung: Das Ergebnis dieser Aufgabe ist nicht allgemeingültig und nicht auf andere Fälle übertragbar.
12. Finde Beispiele für zwei über \mathbb{Q} algebraische Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$, sodass die Summe $x + y$ größeren, gleichen oder kleineren Grad über \mathbb{Q} als x hat.