Verfahren zur Frobeniusnormalform

Gegeben: Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K.

1. Smithsche Normalform D von $(XE - A) \in K[X]^{n\times n}$ bestimmen:[1]
$$\begin{pmatrix} XE - A & E \\ E & \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} D & R \\ S & \end{pmatrix}$$
Falls auch die Basis zur Frobeniusnormalform gesucht ist, muss man außerdem noch die Matrix R invertieren. Dabei aufpassen: Nur mit Polynomen multiplizieren und dividieren, die in $K[X]$ auch tatsächlich invertierbar sind – das sind also nur die konstanten Polynome (ohne das Nullpolynom). Da S später nicht benötigt wird, kann man sich das Mitführen von S auch sparen. Da für Schritt 4 die Matrix R invertiert werden muss, sollte man möglichst wenig Zeilenumformungen verwenden.

2. Den $K[X]$-Modul $(K^n)_A$ zerlegen: Wenn
$$D = \begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix}$$
mit normierten Polynomen $f_1|f_2|\cdots|f_n$, dann gilt
$$(K^n)_A \cong K[X]/(f_1) \oplus \cdots \oplus K[X]/(f_n) =: M.$$
Falls man sich auch für die Basis interessiert, muss man noch den Isomorphismus angeben; von rechts nach links lautet der
$$R^{-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} [p_1] \\ \vdots \\ [p_n] \end{pmatrix}, \tag{1}$$
wobei aber der resultierende Vektor richtig interpretiert werden muss, wenn er die Polynomvariable X enthält: Ein Vektor der Form $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ muss als
$$f_1(A)\, e_1 + \cdots + f_n(A)\, e_n \in K^n$$
umgeschrieben werden.

3. Frobeniusnormalform angeben:
$$\begin{pmatrix} B(f_1) & & \\ & \ddots & \\ & & B(f_n) \end{pmatrix} \in K^{n\times n},$$
wobei $B(f_i)$ die Teilmatrix zum i-ten Summanden ist und *Begleitmatrix des Polynoms f_i* heißt: Wenn $f_i = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0$, dann
$$B(f_i) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in K^{m\times m}.$$
Im häufig vorkommenden Fall $f_i = X - c$ gilt einfach
$$B(f_i) = \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} \in K^{1\times 1}.$$
Falls $f_i = 1 =$ Einspolynom, dann ist $B(f_i)$ die (0×0)-Matrix und kann einfach weggelassen werden.

4. Wenn gewünscht noch die Basis zur Frobeniusnormalform berechnen: Dazu in jedem Summanden $K[X]/(f_i)$ die kanonische K-Basis
$$[1], [X], [X^2], \ldots, [X^{\deg f_i - 1}]$$
wählen, diese Basen zu einer Gesamt-K-Basis von M kombinieren und mit dem Isomorphismus (1) die zugehörige Basis des K^n berechnen.

[1] Alternativ kann man auch $A - XE$ nehmen.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

1. Die smithsche Normalform D von $XE - A$ st

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & X^3 - 11X^2 + 39X - 45 \end{pmatrix}$$

mit invertierter Transformationsmatrix

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X-3)/2 & 1/2 \\ X-4 & (X-5)/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Also gilt

$$(\mathbb{Q}^3)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 11X^2 + 39X - 45) =: M.$$

3. Die Frobeniusnormalform ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{\boxed{\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 45 \\ 1 & 0 & -39 \\ 0 & 1 & 11 \end{matrix}}}} \end{pmatrix}$$

und besteht also aus drei Teilblöcken, von denen die ersten beiden (0×0)-Blöcke und daher unsichtbar sind. Die Bedeutung der Kastennotation erklärt sich beim Beispiel zur Weierstraßnormalform.

4. Für die Frobeniusnormalform verwenden wir in M die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [1] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X^2] \end{pmatrix} \in M.$$

Mithilfe von R^{-1}, genauer Formel (1), übersetzt sich diese in die $\mathbb{Q}$-Basis

$$1 \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad X \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \quad X^2 \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9/2 \\ 23/2 \end{pmatrix}.$$

von $\mathbb{Q}^3$. (Da in der relevanten dritten Spalte von R^{-1} die Polynomvariable X nicht vorkommt, hat sich die Formel (1) für dieses Beispiel ein wenig vereinfacht.)

Verfahren zur Weierstraßnormalform (WNF)

Bemerkung: Falls die im Verfahren zum Schluss auftretenden Polynome p_j nur Grad 1 haben, heißt das Ergebnis auch *Jordannormalform*.

Gegeben: Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K.

1. Smithsche Normalform von $XE - A$ bestimmen.
2. Den $K[X]$-Modul $(K^n)_A$ zerlegen: $(K^n)_A \cong K[X]/(f_1) \oplus \cdots \oplus K[X]/(f_n)$.

   Falls man auch an einer Basis zur Normalform interessiert ist, muss man hier den Isomorphismus angeben.
3. Die einzelnen Summanden mithilfe des chinesischen Restsatzes weiter zerlegen, etwa
   $$K[X]/(f_i) \cong K[X]/(p_1^{r_1}) \oplus \cdots \oplus K[X]/(p_\ell^{r_\ell}),$$
   wobei die p_j irreduzible Polynome sind und natürlich von i abhängen dürfen. Wieder muss man den Isomorphismus angeben (von rechts nach links genügt), falls man an der Basis interessiert ist.
4. Weierstraßnormalform angeben, indem man die Teilblöcke zu den Summanden aus Schritt 3 aufstellt und zusammenfasst (siehe Tabelle).
5. Wenn gewünscht noch die Basis zur Normalform berechnen, indem man die einzelnen Basen der Summanden zusammenfasst und durch die Isomorphismen der Schritte 3 und 2 schickt.

Zu verwendende Basen

$K[X]$-Modul	K-Basis für WNF	resultierende Darstellungsmatrix
$K[X]/(X-a)$	$[1]$	$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$
$K[X]/((X-a)^2)$	$[1], [X-a]$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$
$K[X]/((X-a)^3)$	$[1], [X-a], [(X-a)^2]$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$
$K[X]/(f), \deg f = 2$	$[1], [X]$	$B(f) =$ Begleitmatrix von $f \in K^{2\times 2}$
$K[X]/(f^2), \deg f = 2$	$[1], [X], [f], [Xf]$	$\begin{pmatrix} B(f) & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & B(f) \end{pmatrix}$
$K[X]/(f^3), \deg f = 2$	$[1], [X], [f], [Xf], [f^2], [Xf^2]$	$\begin{pmatrix} B(f) & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & B(f) & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & B(f) \end{pmatrix}$

Chinesischer Restsatz

Satz. Seien R eine K-Algebra und $f, g \in R$ zueinander teilerfremde Elemente. Ist dann
$$1 = uf + vg \in R$$
eine Bézoutdarstellung ihres größten gemeinsamen Teilers, so sind die Abbildungen
$$\begin{array}{rcl} R/(f) \oplus R/(g) & \longrightarrow & R/(fg) \\ \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} & \longmapsto & [gx + fy] \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} R/(fg) & \longrightarrow & R/(f) \oplus R/(g) \\ [z] & \longmapsto & \begin{pmatrix} vz \\ uz \end{pmatrix} \end{array}$$
zueinander inverse Isomorphismen von K-Algebren.

Beispiel 1

Wir verwenden die Matrix vom Beispiel zur Frobeniusnormalform: Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

1. Smithsche Normalform: Siehe auf vorheriger Seite.
2. Erste Zerlegung: $(\mathbb{Q}^3)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/((X-3)^2\,(X-5)) =: M$.
3. Weitere Zerlegung: $(\mathbb{Q}^3)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/((X-3)^2) \oplus \mathbb{Q}[X]/(X-5) =: N$.
4. Weierstraßnormalform (ist sogar Jordannormalform):

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & \\ 1 & \boxed{3} & \\ & & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

5. Gemäß der Tabelle wählen wir in N die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [1] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X-3] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [1] \end{pmatrix} \in N.$$

Diese übersetzt sich mit dem durch den chinesischen Restsatz gegebenen Isomorphismus[2] in die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [(X-5)\cdot 1] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [(X-5)\cdot(X-3)] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [(X-3)^2\cdot 1] \end{pmatrix} \in M$$

von M und mit R^{-1} in die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^3$.

Beispiel 2

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

1. Smithsche Normalform:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (X-1)^2\,(X^2+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{4\times 4},$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} X+2 & X^2+2X-1 & 2X^4-9X^2+10X+9 & -(6X^3+8X^2-13X+6)/10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2-5X & -10X^3+24X^2-12X-20 & (15X^2-16X+5)/5 \\ -8 & 3-8X & -16X^3+38X^2-20X-30 & (24X^2-25X+10)/5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{4\times 4}.$$

Hierfür habe ich absichtlich möglichst viele Zeilenumformungen verwendet, damit die Matrix R^{-1} so kompliziert wird, dass man in Schritt 5 das allgemeine Prinzip erkennt. Wenn man sich an das Gebot hält, möglichst wenig Zeilenumformungen zu verwenden, wird die Matrix übersichtlicher.

2. Erste Zerlegung: $(\mathbb{Q}^4)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/((X-1)^2\,(X^2+1)) =: M$.

[2] In der Notation der vorherigen Seite: $f = (X-3)^2, g = (X-5)$; die Bézoutdarstellung bräuchte man nur für den Isomorphismus in die andere Richtung.

3. Weitere Zerlegung: $(\mathbb{Q}^4)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/(1) \oplus \mathbb{Q}[X]/((X-1)^2) \oplus \mathbb{Q}[X]/(X^2+1) =: N$.
4. Weierstraßnormalform (ist keine Jordannormalform, eine solche hat A nicht):

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{1} \end{matrix}} & \\ & \boxed{\boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}} \end{pmatrix}$$

5. Gemäß der Tabelle wählen wir in N die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [1] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [X-1] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [1] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [X] \end{pmatrix} \in N.$$

Mit dem Isomorphismus aus dem chinesischen Restsatz erhält man die $\mathbb{Q}$-Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [(X^2+1)\cdot 1] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [(X^2+1)\cdot(X-1)] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [(X-1)^2\cdot 1] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [(X-1)^2\cdot X] \end{pmatrix} \in M$$

von M. Schließlich ist noch der Isomorphismus (1) anzuwenden. Dazu rechnen wir zunächst aus:

$$\begin{aligned} R^{-1}e_4 &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -(6X^3+8X^2-13X+6) \\ 0 \\ 2(15X^2-16X+5) \\ 2(24X^2-25X+10) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\left(-(6A^3+8A^2-13A+6E)e_1 + 2(15A^2-16A+5E)e_3 + 2(24A^2-25A+10E)e_4\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/10 \\ -3/10 \\ 0 \end{pmatrix} =: v. \end{aligned}$$

Dann ergeben sich folgende Basisvektoren in $\mathbb{Q}^4$:

$$(A^2+E)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2+E)(A-E)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A-E)^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-E)^2 A v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3

Sei $A \in \mathbb{Q}^{8\times 8}$ eine Matrix mit Minimalpolynom

$$m = X^2\,(X^2+2)\,(X^2-3)^2 \in \mathbb{Q}[X].$$

Da dieses Polynom schon Grad 8 hat, ist es gleich dem charakteristischen Polynom von A und wir können auch ohne genaue Kenntnis der Einträge von A erschließen, dass die smithsche Normalform von $XE - A$ wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & m \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{8\times 8}$$

Also erhalten wir nach Verwendung des chinesischen Restsatzes die Zerlegung

$$(\mathbb{Q}^8)_A \cong \mathbb{Q}[X]/(m) \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2) \oplus \mathbb{Q}[X]/(X^2+2) \oplus \mathbb{Q}[X]/((X^2-3)^2).$$

Daher sieht die Weierstraßnormalform von A wie folgt aus:

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{0} & 0 & & & & & & \\
1 & \boxed{0} & & & & & & \\
 & & 0 & -2 & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & 3 & & \\
 & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 3 \\
 & & & & & & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Dabei korrespondieren die äußeren Kästen zur Zerlegung von $(\mathbb{Q}^8)_A$ in drei Summanden und die inneren Kästen jeweils zu Begleitmatrizen.

Zusammenhang zum Vorgehen in der Linearen Algebra II

– Die hier verwendete Kastennotation korrespondiert mit der Summenzerlegung von $(K^n)_A$. Bis auf Reihenfolge stimmt diese mit der Kastenzerlegung in Linearer Algebra II überein: Dort sortiert man alle Unterblöcke zu einem gemeinsamen Eigenwert in einen großen Kasten.

– Die Merkregeln

> *Die Vielfachheit von $(X-\lambda)$ im Minimalpolynom ist gleich der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ.*
>
> *Die Vielfachheit von $(X-\lambda)$ im charakteristischen Polynom ist gleich der Gesamtgröße aller Jordanblöcke zum Eigenwert λ.*

folgen sofort aus der Summenzerlegung von $(K^n)_A$, wenn man bedenkt, dass die Diagonaleinträge der smithschen Normalform sich sukzessive teilen, der letzte Eintrag das Minimalpolynom und das Produkt aller Einträge das charakteristische Polynom ist.