Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Erste Schritte im Ring der gaußschen Zahlen*

Zerlege folgende Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[i]$:

a) $119 - 49i$

b) $153 + 24i$

Aufgabe 2. *Ein Beispiel für einen nicht-faktoriellen Ring*

Wir betrachten den Ring $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Was sind die Einheiten von $\mathcal{O}$?

b) Zeige, dass folgende Elemente von $\mathcal{O}$ alle irreduzibel sind:

$$3, \quad 7, \quad 1 + 2\sqrt{-5}, \quad 1 - 2\sqrt{-5}.$$

c) Zeige, dass $\mathcal{O}$ nicht faktoriell ist, indem du $21 \in \mathcal{O}$ auf zwei verschiedene Arten zerlegst.

Aufgabe 3. *Ein Beispiel für einen faktoriellen Ring*

Zeige, dass der Ring $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] := \{a + b\frac{1+\sqrt{-7}}{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ euklidisch ist.

Aufgabe 4. *Geschenkte Ganzzahligkeit rationaler Lösungen*

a) Zeige, dass eine rationale Zahl genau dann ganzzahlig ist, wenn sie *ganz über* $\mathbb{Z}$ ist, also Nullstelle eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

b) Zeige damit schnell und mühelos: $\sqrt[n]{2}$ ist für $n \geq 3$ nicht rational.

c) Folgere die Behauptung von b) aus dem Großen Fermatschen Satz. Was ist daran *besonders* witzig?

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 2 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Zu erwartende und überraschende Ganzheit*

a) Zeige, dass $\sqrt{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

b) Zeige, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nicht ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

c) Zeige, dass $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 2. *Produkt ganzer Zahlen*

a) Seien x und y komplexe Zahlen mit $x^3 - x + 1 = 0$ und $y^2 - 2 = 0$. Finde eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, die die Zahl $x \cdot y$ als Lösung besitzt.

b) Der *Grad* einer ganzen Zahl z ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, die z als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier ganzer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

Aufgabe 3. *Erste Schritte mit Norm und Spur*

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(X) := X^3 - 2\,X + 5$. Sei $K := \mathbb{Q}[\alpha]$. Berechne Norm und Spur des Elements $2\alpha - 1 \in K$:

a) Begründe kurz, wieso $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K ist.

b) Stelle eine Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $K \to K$, $z \mapsto (2\alpha - 1)z$ auf.

c) Berechne Determinante und Spur dieser Matrix.

Aufgabe 4. *Knobeln mit Einheitswurzeln*

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel (also $\zeta^p = 1$ und $\zeta \neq 1$). Sei $K := \mathbb{Q}[\zeta]$.

a) Was ist die Norm von $1 - \zeta \in K$? *Hinweis.* Das Minimalpolynom von ζ ist $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Zahl $\gamma_k := \frac{1-\zeta^k}{1-\zeta} \in K$ in $\mathcal{O}_K$ liegt.

c) Seien nun k und p zueinander teilerfremd. Zeige, dass γ_k sogar in $\mathcal{O}_K^\times$ liegt.

♡ **Aufgabe 5.** *Einheitswurzeln in nichtkommutativen Matrixringen*

Bestimme die Anzahl der (4×4)-Matrizen A mit rationalen Einträgen und $A^7 = I$, $A \neq I$.

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Beispiel für ein Primelement in einem Ganzheitsring*

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel (also etwa $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$). Sei $K := \mathbb{Q}[\zeta]$.

a) Zeige: $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm 1, \pm\zeta, \pm\zeta^2\}$.

b) Zeige, dass $\lambda := 1 - \zeta \in \mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_K$ prim ist.

c) Zeige, dass 3 und λ^2 in $\mathcal{O}_K$ zueinander assoziiert sind.

Aufgabe 2. *Beispiele zur Diskriminantenberechnung*

a) Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. Berechne die Diskriminante der $\mathbb{Q}$-Basis $(1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}^2)$ von K.

b) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Bestimme die Diskriminante der Basis $(1, \sqrt{d})$ bzw. $(1, \frac{1+\sqrt{d}}{2})$ von $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (je nach Fall).

Aufgabe 3. *Eine allgemeine Formel für die Diskriminante*

a) Sei $K = \mathbb{Q}[\vartheta]$ ein Zahlkörper vom Grad n. Sei $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von ϑ. Zeige:

$$d(1, \vartheta, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot N_{K|\mathbb{Q}}(p'(\vartheta)).$$

b) Sei p eine Primzahl und sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Folgere:

$$d(1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} \cdot p^{p-2}.$$

Aufgabe 4. *Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Ganzheitsbasis*

Sei K ein Zahlkörper. Sei B eine $\mathbb{Q}$-Basis von K, deren Elemente schon in $\mathcal{O}_K$ liegen; damit ist ihre Diskriminante d ganzzahlig. Zeige: Ist d quadratfrei, so ist B eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 5. *Ein erster Ausblick auf Verzweigung von Primidealen*

Ist das Ideal $(3, 1 + 2\sqrt{-5})$ von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]}$ prim? Ist es sogar maximal?

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Ein zweiter Ausblick auf Verzweigung von Primidealen*

Sei $\mathfrak{q} := (11) \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist.

b) Berechne den Grad $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{q} : \mathbb{Z}/(11)]$.

Aufgabe 2. *Ein Kriterium für die Trägheit eines Primideals*

Sei p eine Primzahl. Sei d quadratfrei und $K := \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

a) Zeige: Wenn die Kongruenz $x^2 \equiv d \bmod p$ unlösbar ist, dann ist $(p) \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Primideal.

b) Zeige, dass auch die Umkehrung der Aussage aus a) gilt, falls p ungerade ist.

Hinweis. Ist $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ein quadratisches Polynom, so ist der Ring $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn f keine Nullstelle modulo p besitzt.

Aufgabe 3. *Der Diskriminantensatz von Stickelberger*

Sei d die Diskrimante einer $\mathbb{Q}$-Basis eines beliebigen Zahlkörpers, welche nur aus ganzen Elementen besteht. Zeige, dass d modulo 4 gleich 0 oder 1 ist.

Hinweis. Solltest du in die Situation kommen, Körpereinbettungen auf gewisse komplexe Zahlen anzuwenden, dann stress dich nicht, falls diese Zahlen gar nicht in der Definitionsmenge der Körpereinbettungen liegen sollten. Das ist ein behebbares technisches Problem.

Aufgabe 4. *Ein Konstruktionsverfahren für Ganzheitsbasen*

Sei K ein Zahlkörper und $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K, welche nur aus ganzen Elementen besteht. Sei d ihre Diskriminante. Für $i = 1, \dots, n$ wählen wir aus der Menge

$$B_i := \{x \in \mathcal{O}_K \mid x = \tfrac{1}{d}(a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2 + \cdots + a_i\vartheta_i) \text{ für gewisse } a_1, \dots, a_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } a_i \neq 0\}$$

ein Element x_i mit minimalem Betrag des Koeffizienten a_i. Zeige, dass $(x_1, \dots, x_n)$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ ist.

Aufgabe 5. *Wir suchen eine Ganzheitsbasis*

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $K := \mathbb{Q}[\alpha]$. Finde eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Hinweis. Verwende etwa das Verfahren aus Aufgabe 4. Zur Kontrolle: Die Diskriminante von $(1, \alpha, \alpha^2)$ ist $-2^2 \cdot 107$. Wenn du überprüfen möchtest, ob ein Element aus K ganz ist, dann berechne zunächst seine Spur und dann seine Norm; sind diese nicht ganzzahlig, so kann das Element nicht ganz sein. Im schlimmsten Fall musst du folgende Charakterisierung verwenden (in dieser Aufgabe kommt man aber darum herum): Ein Element u aus K ist genau dann ganz, wenn das charakteristische Polynom der linearen Abbildung $K \to K$, $x \mapsto ux$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

♡ **Aufgabe 6.** *Der mystische Körper mit einem Element*

Das *q-Analogon* einer Zahl n ist $[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

a) Zeige: Ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_q$ besitzt genau $(q^n - 1)/(q - 1)$ eindimensionale Untervektorräume.

b) Finde eine Formel für die Anzahl k-dimensionaler Untervektorräume eines n-dimensionalen Vektorraums über $\mathbb{F}_q$. Drücke dein Ergebnis über q-Analoga aus.

c) Setze ohne Erlaubnis in deiner Formel aus b) $q := 1$. Was passiert? Was sollten also Vektorräume und Untervektorräume über dem Körper $\mathbb{F}_1$ mit einem Element sein?

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Dedekindringe mit nur endlich vielen Primidealen*

Sei A ein Dedekindring, der nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \neq (0)$ hat. Begründe kurz:

a) Es gibt ein Element $\pi \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_1^2$.

b) Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x \equiv \pi \bmod \mathfrak{p}_1^2$ und $x \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_k$ für $k \geq 2$.

c) Für dieses Element gilt $\mathfrak{p}_1 = (x)$.

d) Alle Ideale von A sind Hauptideale.

Aufgabe 2. *Ideale und Faktorringe von Dedekindringen*

Sei A ein Dedekindring.

a) Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \neq (0)$. Sei $m \geq 0$. Zeige: $A/\mathfrak{p}^m$ ist ein Hauptidealring.

b) Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq (0)$. Zeige, dass $A/\mathfrak{a}$ ein Hauptidealring ist.

c) Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $x \in \mathfrak{a}$ mit $x \neq 0$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ von zwei Elementen erzeugt werden kann, von denen eines x ist.

Hinweis. In einem Faktorring $A/\mathfrak{b}$ gibt es genau so viele Primideale, wie es Primideale in A gibt, welche $\mathfrak{b}$ umfassen. Erinnere dich an den chinesischen Restsatz.

Aufgabe 3. *Beispiel für eine Volumenberechnung*

Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. Sei $\mathfrak{p} := (3, 1 + 2\sqrt{-5}) \subseteq \mathcal{O}_K$. Bestimme das Volumen des vollständigen Gitters $j[\mathfrak{p}] \subseteq K_{\mathbb{R}}$, wobei $j : K \hookrightarrow K_{\mathbb{R}}$ die Einbettung in den Minkowskiraum ist.

Bemerkung. Es gibt eine Formel für das Volumen, die sofort den Wert $6\sqrt{5}$ liefert. Aber es ist spannender, das Volumen per Hand zu berechnen.

Aufgabe 4. *Charakterisierung von Gittern*

a) Zeige, dass eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gitter ist, wenn sie diskret ist (wenn jeder Punkt $\gamma \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$ besitzt).

Hinweis. Wähle für die Rückrichtung eine maximale über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Familie $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ von Vektoren aus Γ; setze $\Gamma_0 := \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$; zeige, dass $q := |\Gamma/\Gamma_0|$ endlich ist (überlege dir dazu, wie die Äquivalenzklassen in Γ/Γ_0 aussehen); folgere, dass $q\Gamma \subseteq \Gamma_0$; und zeige damit die Behauptung.

b) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Zahlkörper vom Grad ≥ 3. Folgere, dass es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Element $a \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ gibt, dessen komplexer Betrag kleiner als ε ist.

♡ **Aufgabe 5.** *Dedekindringe mit Klassenzahl 1*

Zeige, dass ein Dedekindring genau dann faktoriell ist, wenn er ein Hauptidealbereich ist.

Hinweis. Zeige für die Hinrichtung, dass jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Fixiere dazu ein Element $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ und zerlege zum einen das Ideal (π) in Primideale (welches Ideal kommt dabei sicher vor?) und zum anderen das Element π in Primfaktoren.

♡ **Aufgabe 6.** *Geradenbündel über dem Spektrum von Ganzheitsringen*

Sei K ein Zahlkörper. Zeige: Die gebrochenen Ideale von K sind als $\mathcal{O}_K$-Moduln projektiv.

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 6 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Klassenzahlberechnungen*

a) Zeige, dass die quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ für $d \in \{-7, -3, -2, -1, 2, 3, 5\}$ die Klassenzahl 1 besitzen.

b) Zeige, dass auch $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ die Klassenzahl 1 besitzt.

c) Was ist die Klassenzahl von $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Aufgabe 2. *Eine Schranke für die Diskriminante*

a) Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Sei d_K die Diskriminante einer Ganzheitsbasis. Zeige:

$$|d_K| \geq \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

b) Zeige: Bis auf $\mathbb{Q}$ selbst gibt es keinen Zahlkörper mit $|d_K| = 1$.

Bemerkung. Wenn du möchtest, kannst du bei der Gelegenheit auch gleich zeigen, dass $|d_K| \to \infty$ für $n \to \infty$. Eine Verstärkung dieser Aussage ist das Hermite–Minkowski-Theorem, demnach es zu jeder Schranke nur endlich viele Zahlkörper mit Diskriminante unterhalb dieser Schranke gibt.

Aufgabe 3. *Wir mögen Hauptideale*

a) Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Sei $\mathfrak{a}^m = (\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ und eine Zahl $m \geq 0$. Sei $L := K(\sqrt[m]{\alpha})$. Zeige, dass das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ von $\mathcal{O}_L$ ein Hauptideal ist.

Hinweis. Nur um Missverständnissen vorzubeugen, das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ besteht aus allen $\mathcal{O}_L$-Linearkombinationen von Elementen aus $\mathfrak{a}$.

b) Sei K ein Zahlkörper. Finde eine endliche Erweiterung L von K, sodass jedes Ideal von $\mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_L$ zu einem Hauptideal wird (im gleichen Sinn wie in a)).

Hinweis. Versuche, „die Klassengruppe zu töten“.

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Dichtheit ganzzahliger Linearkombinationen*

Sei x eine irrationale reelle Zahl. Zeige: $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(1, x)$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. *Auf den Spuren Fermats*

Sei K ein Zahlkörper.

a) Sei $m \geq 0$ eine zur Klassenzahl h_K teilerfremde Zahl. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Zeige: Ist $\mathfrak{a}^m$ ein Hauptideal, so ist auch $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

b) Gelte in $\mathcal{O}_K$ die Identität $z^p = x_1 \cdots x_n$, wobei die x_i paarweise teilerfremd sind. Zeige: Ist $h_K = 1$, so sind die x_i bis auf Einheiten p-te Potenzen.
Hinweis. Die Behauptung gilt in allgemeinen faktoriellen Ringen.

c) Zeige dieselbe Behauptung wie in c) unter der schwächeren Voraussetzung $p \nmid h_K$.

d) Zeige: Um Fermats großen Satz zu beweisen, genügt es, ihn für primzahlige Exponenten und für den Exponent 4 zu beweisen.

Aufgabe 3. *Verzweigung von Primidealen*

Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Es ist $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$. Bestimme das Verzweigungsverhalten der Primzahlen $2, 3, 5$ und 11 in $\mathcal{O}_K$.

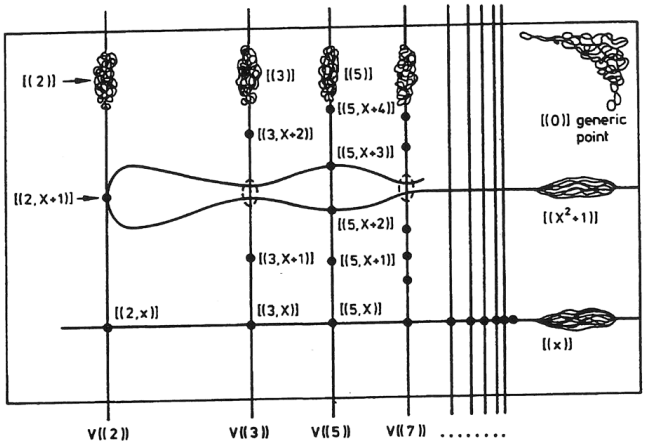
Aufgabe 4. *Mumfords Schatzkarte*

Die unten stehende Skizze visualisiert die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$. Was möchte sie dir mitteilen? Untersuche folgende Fragen:

a) Welche Primideale sind jeweils zu vertikalen Linien gruppiert? Wieso?

b) Was hat die mit „$[(X^2 + 1)]$“ beschriftete Kurve mit dem Verzweigungsverhalten von Primzahlen in $\mathbb{Z}[i]$ zu tun?

c) Kannst du auf analoge Art und Weise die Primideale von $\mathcal{O}_K$ aus Aufgabe 3 visualisieren? Deine Skizze sollte aus zwei übereinander liegenden Kurven bestehen, wobei die untere Kurve einfach die gerade Linie der Primideale von $\mathbb{Z}$ sein sollte. Die obere Kurve sollte „aus drei Strängen bestehen“.



Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 8 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Verzweigung ist die Ausnahme*

Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Gelte $K = \mathbb{Q}[\vartheta]$ mit $\vartheta \in \mathcal{O}_K$.

a) Zeige: Die Diskriminante d_ϑ der $\mathbb{Q}$-Basis $(1, \vartheta, \dots, \vartheta^{n-1})$ von K ist gleich der Diskriminante des Minimalpolynoms von ϑ.

b) Sei p eine Primzahl, sodass die Ideale (p) und $\mathfrak{F}_\vartheta$ von $\mathcal{O}_K$ zueinander teilerfremd sind. Zeige, dass p genau dann in K verzweigt ist, wenn $p \mid d_\vartheta$.

c) Zeige: Nur endlich viele Primzahlen sind in K verzweigt. Kannst du die Kandidaten für verzweigte Primzahlen sogar explizit angeben? Was ist die Konsequenz für die Visualisierung von Ganzheitsringen im Stile von Mumfords Schatzkarte?

d) Interpretiere Aufgabe 2 von Blatt 4 in neuem Licht.

Aufgabe 2. *Trägheit bei nichtzyklischer Galoisgruppe*

Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Sei $\mathrm{Gal}(L|K)$ nicht zyklisch.

a) Zeige, dass kein Primideal von $\mathcal{O}_K$ in L träge ist.

Tipp. Verwende ohne Beweis, dass für Primideale $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ mit Verzweigungsindex 1 gilt, dass $G_\mathfrak{P} \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$.

b) Folgere, dass nur endlich viele Primideale von $\mathcal{O}_K$ in L unzerlegt sind.

Hinweis. Ein Scholium von Aufgabe 1c) ist, dass nur endlich viele Primideale von $\mathcal{O}_K$ in L verzweigt sind.

Aufgabe 3. *Vorfreude aufs quadratische Reziprozitätsgesetz, Gauß' aureum theorema*

a) Ist 10 modulo $p := 65537$ ein quadratischer Rest?

Hinweis. Verwende ohne Beweis, dass $\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)$ (das ist nicht krass) und $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ (das ist krass).

b) Bestimme die Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $1/65537$.

♡ **Aufgabe 4.** *Lücken zwischen Primzahlen*

Zeige: Zu jeder Lauflänge $n \geq 1$ gibt es eine Folge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, welche alle keine Primzahlen sind.

♡ **Aufgabe 5.** *Verzweigte Überlagerungen in der komplexen Geometrie*

a) Informiere dich über verzweigte Überlagerungen (branched coverings) in der komplexen Geometrie und vergleiche die dortige Situation mit der fundamentalen Gleichung.

b) Frage Sven, was er dir zu diesem Thema auf jeden Fall mitgeben möchte.

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Beispiele für interessantes Verzweigungsverhalten*

Finde Beispiele für Galoiserweiterungen $L|K$ von Zahlkörpern und Primideale $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \neq (0)$, für die

a) in der Primidealzerlegung von $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ mindestens zwei Ideale vorkommen („$r \geq 2$“),

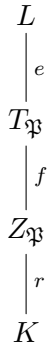
b) die Primfaktoren mindestens Verzweigungsindex zwei haben („$e \geq 2$“),

c) der gemeinsame Trägheitsgrad der Primfaktoren mindestens zwei ist („$f \geq 2$“).

Präzisierung. Finde drei einzelne Beispiele oder Beispiele, die mehrere der Wünsche erfüllen. Ganz wie du willst.

Aufgabe 2. *Faktorisierung in Zerlegungskörper und Trägheitskörper*

Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Sei $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$ ein Primideal mit $\mathfrak{P} \neq (0)$. Sei $e := e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$ und $f := f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$. Zeige, dass wir den nebenstehenden Körperturm haben.



a) Wieso liegt $Z_\mathfrak{P}$ in $T_\mathfrak{P}$?

b) Wieso ist $[L : Z_\mathfrak{P}] = ef$?

c) Wieso ist $T_\mathfrak{P}$ über $Z_\mathfrak{P}$ normal und wieso ist $\mathrm{Gal}(T_\mathfrak{P}|Z_\mathfrak{P}) \cong \mathrm{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})|\kappa(\mathfrak{p}))$?

d) Wieso ist $[L : T_\mathfrak{P}] = e$ und wieso ist $[T_\mathfrak{P} : Z_\mathfrak{P}] = f$?

♡ e) Sei $\mathfrak{r} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{T_\mathfrak{P}}$. Sei $\mathfrak{q} := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{Z_\mathfrak{P}}$. Zeige $\kappa(\mathfrak{r}) = \kappa(\mathfrak{P})$ und folgere:

$$e(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}), \quad f(\mathfrak{P}|\mathfrak{r}) = 1, \quad e(\mathfrak{r}|\mathfrak{q}) = 1, \quad f(\mathfrak{r}|\mathfrak{q}) = f.$$

Aufgabe 3. *Ein Spezialfall von Dirichlets Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen*

Sei n eine positive natürliche Zahl. Sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom. Seien $p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen. Sei P das Produkt dieser Primzahlen.

a) Zeige, dass es eine natürliche Zahl ℓ gibt, sodass $N := \Phi_n(\ell n P)$ größer als Eins ist.

b) Zeige, dass N einen Primfaktor q enthält, welcher ungleich allen p_i ist.

Tipp. Jeder Primfaktor tut's. Es gilt $\Phi_n(0) = \pm 1$ (wieso?). Was ist daher N modulo den p_i?

c) Weise nach, dass $\ell n P$ modulo q invertierbar ist und in $\mathbb{F}_q^\times$ Ordnung n besitzt.

Tipp. Das Polynom $X^n - 1$ ist auch modulo q separabel, da q zu n teilerfremd ist. Erinnere dich an die Rekursionsformel für die Kreisteilungspolynome.

d) Zeige, dass $q \equiv 1$ modulo n.

♡ e) Extrahiere aus diesem Beweis von Dirichlets Satz eine obere Schranke für die Größe der m-ten Primzahl, welche modulo n gleich 1 ist.

Aufgabe 4. *Ein Geheimnis der Zahl 5*

a) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Sei p eine Primzahl. Zeige: $\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{(p-1)/2}$ modulo p.

b) Sei p eine Primzahl. Sei F_p die p-te Fibonaccizahl. Zeige: $F_p \equiv \left(\frac{5}{p}\right)$ modulo p.

Tipp. Verwende die bekannte Formel $F_n = (\Phi^n - \Psi^n)/(\Phi - \Psi)$, wobei $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\Psi = (1 - \sqrt{5})/2$. Zwei ganze Zahlen teilen einander genau dann, wenn sie es in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$ tun (wieso?).

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 10 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Das inverse galoissche Problem im abelschen Fall*

a) Sei $n \geq 1$. Finde eine galoissche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(n)$.

Hinweis. Finde nach Dirichlets Satz eine Primzahl p mit $p \equiv 1$ modulo n und konstruiere K als geeigneten Fixkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ über $\mathbb{Q}$.

b) Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Finde eine galoissche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong A$.

Hinweis. Wir können $A \cong \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_r)$ schreiben und nach Dirichlets Satz *verschiedene* Primzahlen p_i mit $p_i \equiv 1$ modulo n_i finden. Wir können dann die gesuchte Erweiterung K als den Fixkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_{p_1} \cdots \zeta_{p_r})|\mathbb{Q}$ bezüglich einer geeigneten Untergruppe seiner Galoisgruppe finden. Diese ist unkanonisch isomorph zu $\mathbb{Z}/(p_1 - 1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_r - 1)$.

c) Löse Teilaufgabe b) für nichtkommutative endliche Gruppen.

Aufgabe 2. *Für Matthias S.*

Seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$. Seien ζ_p und ζ_q entsprechende primitive Einheitswurzeln.

a) Erinnere dich, wie man für $n \geq 1$ zeigt, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

b) Zeige ohne viel Mühe: $\mathbb{Q}(\zeta_p, \zeta_q) = \mathbb{Q}(\zeta_{pq})$.

Hinweis. Dein Beweis zeigt allgemeiner, dass $\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{kgV}(n,m)})$.

c) Zeige: $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{Q}(\zeta_q) = \mathbb{Q}$.

Hinweis. Auch diese Behauptung gilt allgemeiner (mit ggT statt kgV), ist dann aber etwas komplizierter zu beweisen. Es gibt mehrere Beweise der spezialisierten Behauptung. Interessant ist zum Beispiel folgender: Erinnere dich, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit $r = f = 1$ zerlegt. Zeige, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_q)$ mit $e = 1$ zerlegt. Folgere, dass sich p in $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{Q}(\zeta_q)$ mit $r = e = f = 1$ zerlegt. Wieso genügt das?

Aufgabe 3. *Ein Kriterium für die Unmöglichkeit einer Potenzbasis*

Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Existiere eine Primzahl $p < n$, welche in K voll zerlegt ist. Zeige, dass kein $\alpha \in K$ mit $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ existiert.

Aufgabe 4. *Endlich etwas Konzeptionelles zum Eisenstein-Kriterium*

Ein normiertes Polynom $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ heißt genau dann *Eisensteinsch* bei einer Primzahl p, wenn alle a_i durch p teilbar, der konstante Koeffizient a_0 aber nicht durch p^2 teilbar ist. Man lernt, dass solche Polynome stets irreduzibel sind.

a) Sei ϑ eine Nullstelle eines solchen Polynoms. Zeige, dass p in $\mathbb{Q}(\vartheta)$ rein verzweigt ist.

Tipp. Sei $\mathfrak{p}$ einer der Primidealfaktoren von $(p) \subseteq \mathcal{O}_K$. Sei e sein Verzweigungsindex; es gilt also $(p) \subseteq \mathfrak{p}^e$ und wir hoffen, $e = n$ nachweisen zu können. Zeige, dass $a_i \vartheta^i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ in $\mathfrak{p}^{e+1}$ liegt. Zeige weiter, dass a_0 (zwar in $\mathfrak{p}^e$, aber) nicht in $\mathfrak{p}^{e+1}$ liegt. Folgere, dass ϑ^n nicht in $\mathfrak{p}^{e+1}$ liegt. Beobachte, dass ϑ^n aber in $\mathfrak{p}^n$ liegt. Sei fertig.

b) Welche Primzahlen muss man also nur untersuchen, wenn man das Eisenstein-Kriterium anwenden möchte? Ist deine Antwort sogar robust gegen Verschiebungen des Polynoms, also dem Übergang zu $f(X - a)$?

Aufgabe 5. *Eine Knobelaufgabe vom Erfinders des Blogs*

Für welche Primzahlen p ist $1/p$ ein Dezimalbruch mit Periodenlänge 10?

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 11 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Endlichkeit der Untergruppe der Einheitswurzeln*

a) Sei K ein Zahlkörper. Zeige, dass $\mu(K) = \{\zeta \in K \mid \zeta^k = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$ endlich ist.

Erinnerung. Es gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für teilerfremde Zahlen a und b und $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

b) Sei K ein Zahlkörper, der über eine Einbettung nach $\mathbb{R}$ verfügt. Zeige: $\mu(K) = \{\pm 1\}$.

c) Für welche Zahlkörper enthält der zugehörige Ganzheitsring nur endlich viele Einheiten? Was ist eine obere Schranke dafür, wie viele Einheiten diese Ringe höchstens enthalten?

Aufgabe 2. *Die Schlacht an der Bucht der Drachen*

a) Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{13}]$. Bestimme eine fundamentale Einheit von $\mathcal{O}_K$, also ein Einheit ε, sodass jede Einheit von $\mathcal{O}_K$ von der Form $\pm\varepsilon^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist.

Tipp. Du weißt, wie $\mathcal{O}_K$ aussieht. Zeichne das Gitter $(\ell \circ j)[\mathcal{O}_K^\times]$ in $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und finde einen Punkt, der dem Ursprung am nächsten ist. Das ist eine fundamentale Einheit.

b) Als sich Daenerys' Armee der Unbefleckten im üblichen militärischen Stil formiert hatte, sahen ihre Gegner 13 gleich große quadratische Einheiten. Zusammen mit Daenerys selbst hätten sie aber auch ein einzelnes großes Quadrat bilden können. Wie viele Krieger umfasste die Armee und wie alt ist der Busfahrer?

Tipp. Für den ersten Teil Aufgabe a).

Aufgabe 3. *Ein allgemeines Beispiel zur Einheitenbestimmung*

a) Sei K ein Zahlkörper mit r reellen und s Paaren komplexer Einbettungen. Zeige, dass das Vorzeichen der Diskriminante von K gleich $(-1)^s$ ist.

b) Sei K ein Zahlkörper vom Grad 3 mit negativer Diskriminante. Zeige, dass es eine fundamentale Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ gibt und dass $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ ist.

Tipp. Weise zunächst nach, dass K über genau eine reelle und genau ein Pärchen komplexer Einbettungen verfügt. Damit ausgestattet liefert dir der Dirichletsche Einheitensatz eine fundamentale Einheit ε. Weise nun nach, dass $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}] = 3$. Damit folgt $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

Aufgabe 4. *Einheiten von rein reellen Zahlkörpern*

Sei K ein rein reeller Zahlkörper (d. h. dass das Bild einer jeden Körpereinbettung $K \to \mathbb{C}$ schon in $\mathbb{R}$ liegt). Sei X eine echte nichtleere Teilmenge von $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{R})$. Zeige, dass es eine Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ mit $0 < \sigma(\varepsilon) < 1$ für alle $\sigma \in X$ und $\sigma(\varepsilon) > 1$ für alle $\sigma \notin X$ gibt.

Hinweis. Verwende *nicht* den Gitterpunktsatz von Minkowski. Verwende nur, dass das Einheitengitter ein vollständiges Gitter der Spur-Null-Hyperebene ist. Vergiss am Ende nicht, zu quadrieren!

Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zur Algebraischen Zahlentheorie

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen stehen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter. Die p-adischen Zahlen sind wie die 10-adischen, nur dass man die Ziffern $\{0, \dots, p-1\}$ verwendet.

Aufgabe 1. *Spiel und Spaß mit 10-adischen Zahlen I*

a) Was ist $\dots 99999 + 1$ in $\mathbb{Z}_{10}$?

b) Schreibe $2/3$ als 10-adische Zahl.

c) Gib ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$ an, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?

Aufgabe 2. *Spiel und Spaß mit p-adischen Zahlen II*

a) Sei n eine zu p teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass n in $\mathbb{Z}_p$ invertierbar ist.

Tipp. Hensels Lemma.

b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+p^n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n}$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Z}_p$.

Hinweis. Freestyle-Aufgabe! Mach dir keinen großen Kopf um formale Rechtfertigung. Es gilt $\lim_{n\to\infty} p^n = 0$ in $\mathbb{Z}_p$.

c) Seien x und y ganze Zahlen. Finde eine Folge p-adischer Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x und in $\mathbb{Z}_p$ gegen y konvergiert.

d) Gibt es in $\mathbb{Z}_{13}$ eine Quadratwurzel aus -1?

Aufgabe 3. *Eine einfache Form von Hensels Lemma*

Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das modulo p eine einfache Nullstelle besitzt: ein Element $x_1 \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_1) \equiv 0$ modulo p, sodass es ein Element $y \in \mathbb{Z}$ mit $f'(x_1)y \equiv 1$ modulo p gibt. Wir definieren für $n \geq 1$: $x_{n+1} := x_n - yf(x_n)$.

a) Zeige für $n \geq 1$, dass $x_n \equiv x_m \pmod{p^m}$ für $m < n$ und dass $f(x_n) \equiv 0 \pmod{p^n}$.

Tipp. Induktion und Taylorentwicklung.

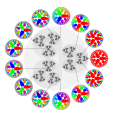
b) Verwende die Folge $(x_n)_n$, um eine Nullstelle von f in $\mathbb{Z}_p$ zu konstruieren.

c) Unter welchem Namen ist das Konstruktionsverfahren für die x_n bekannt? Bewundere die Einheit der Mathematik.

♡ **Aufgabe 4.** *Eine kuriose diophantische Gleichung*

Zeige, dass die Gleichung $(X^2 - 2) \cdot (X^2 - 17) \cdot (X^2 - 34) = 0$ nicht über $\mathbb{Z}$, aber über jedem Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ mit $n \geq 1$ lösbar ist.

Tipp. Zeige die Lösbarkeit zunächst für $\mathbb{Z}/(p)$, dann mit Hensels Lemma für $\mathbb{Z}/(p^k)$ und schließe mit dem chinesischen Restsatz ab.



Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Triviales zu Bewertungen*

Sei $|\cdot|$ eine Bewertung auf einem Körper K.

a) Zeige, dass $|\cdot|$ genau dann die verschärfte Dreiecksungleichung $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ erfüllt, wenn für alle $x \in K$ aus $|x| \leq 1$ folgt, dass $|x+1| \leq 1$.

Gelte von nun an die verschärfte Dreiecksungleichung.

b) Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$.

c) Zeige, dass alle Dreiecke in K gleichschenklig sind.

Tipp. Dividiere durch $|x|$ oder $|y|$. Schreibe sowas wie „$|x + (y - x)|$“.

Aufgabe 2. *Triviale Bewertungen*

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei w eine Exponentialbewertung auf L, welche auf K trivial ist (d. h. $w(x) = 0$ für alle $x \in K^\times$). Zeige, dass w auf L trivial ist.

Aufgabe 3. *Charakterisierung nichtarchimedischer Bewertungen*

Sei $|\cdot|$ eine nichttriviale nichtarchimedische Bewertung auf einem Zahlkörper K.

a) Sei zunächst $K = \mathbb{Q}$. Zeige, dass es eine Primzahl p mit $|\cdot| = |\cdot|_p$ gibt.

b) Zeige, dass es ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \neq (0)$ und $|\cdot| = |\cdot|_\mathfrak{p}$ gibt.

Hinweis. Die Bewertung erfüllt die verschärfte Dreiecksungleichung. Zeige zunächst, dass $|x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Zeige dann, dass $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$ ein nichttriviales Primideal von $\mathbb{Z}$ ist. Es ist also von der Form (p) für eine Primzahl p. Für diese Primzahl p kannst die Behauptung nachweisen. Der Beweis im allgemeinen Fall verläuft analog, mit $\mathcal{O}_K$ statt $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. *Bewertung irreduzibler Polynome*

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper. Sei $\mathcal{O} := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ sein Bewertungsring. Sei $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom.

a) Zeige, dass $|f(X)| = \max\{|a_0|, |a_n|\}$.

Hinweis. Nach Definition ist $|f(X)| = \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}$. Verwende Hensels Lemma in seiner allgemeinen Formulierung.

b) Folgere: Ist $f(X)$ normiert und $a_0 \in \mathcal{O}$, so gilt schon $f(X) \in \mathcal{O}[X]$.

Aufgabe 5. *Fortsetzung von Bewertungen*

Sei K ein vollständig diskret bewerteter Körper K. Sei $L|K$ eine Erweiterung vom Grad n. Zeige, dass die Setzung $|x| := \sqrt[n]{|N_{L|K}(x)|}$ für $x \in L$ eine Bewertung auf L definiert, welche die gegebene Bewertung auf K fortsetzt.

Tipp. Zeige zunächst, dass der ganze Abschluss des Bewertungsrings $\mathcal{O}_K$ von K in L gleich $\{x \in L \mid N_{L|K}(x) \in \mathcal{O}_K\}$ ist. Verwende dazu die bekannte Formel, die Norm und den konstanten Koeffizienten des Minimalpolynoms miteinander in Beziehung setzt. Die Inklusion „$\subseteq$“ wurde schon vor langer Zeit behandelt. Nutze für die andere Inklusion die Folgerung aus der vorherigen Teilaufgabe.