Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Erste Schritte im Ring der gaußschen Zahlen*

Zerlege folgende Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[i]$:

a) $119 - 49i$

b) $153 + 24i$

Aufgabe 2. *Ein Beispiel für einen nicht-faktoriellen Ring*

Wir betrachten den Ring $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Was sind die Einheiten von $\mathcal{O}$?

b) Zeige, dass folgende Elemente von $\mathcal{O}$ alle irreduzibel sind:

$$3, \quad 7, \quad 1 + 2\sqrt{-5}, \quad 1 - 2\sqrt{-5}.$$

c) Zeige, dass $\mathcal{O}$ nicht faktoriell ist, indem du $21 \in \mathcal{O}$ auf zwei verschiedene Arten zerlegst.

Aufgabe 3. *Ein Beispiel für einen faktoriellen Ring*

Zeige, dass der Ring $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] := \{a + b\frac{1+\sqrt{-7}}{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ euklidisch ist.

Aufgabe 4. *Geschenkte Ganzzahligkeit rationaler Lösungen*

a) Zeige, dass eine rationale Zahl genau dann ganzzahlig ist, wenn sie *ganz über* $\mathbb{Z}$ ist, also Nullstelle eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

b) Zeige damit schnell und mühelos: $\sqrt[n]{2}$ ist für $n \geq 3$ nicht rational.

c) Folgere die Behauptung von b) aus dem Großen Fermatschen Satz. Was ist daran *besonders* witzig?