Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Schnee-im-April-Semester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Ein zweiter Ausblick auf Verzweigung von Primidealen*

Sei $\mathfrak{q} := (11) \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist.

b) Berechne den Grad $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{q} : \mathbb{Z}/(11)]$.

Aufgabe 2. *Ein Kriterium für die Trägheit eines Primideals*

Sei p eine Primzahl. Sei d quadratfrei und $K := \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

a) Zeige: Wenn die Kongruenz $x^2 \equiv d \bmod p$ unlösbar ist, dann ist $(p) \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Primideal.

b) Zeige, dass auch die Umkehrung der Aussage aus a) gilt, falls p ungerade ist.

Hinweis. Ist $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ein quadratisches Polynom, so ist der Ring $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn f keine Nullstelle modulo p besitzt.

Aufgabe 3. *Der Diskriminantensatz von Stickelberger*

Sei d die Diskrimante einer $\mathbb{Q}$-Basis eines beliebigen Zahlkörpers, welche nur aus ganzen Elementen besteht. Zeige, dass d modulo 4 gleich 0 oder 1 ist.

Hinweis. Solltest du in die Situation kommen, Körpereinbettungen auf gewisse komplexe Zahlen anzuwenden, dann stress dich nicht, falls diese Zahlen gar nicht in der Definitionsmenge der Körpereinbettungen liegen sollten. Das ist ein behebbares technisches Problem.

Aufgabe 4. *Ein Konstruktionsverfahren für Ganzheitsbasen*

Sei K ein Zahlkörper und $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K, welche nur aus ganzen Elementen besteht. Sei d ihre Diskriminante. Für $i = 1, \ldots, n$ wählen wir aus der Menge

$$B_i := \{x \in \mathcal{O}_K \,|\, x = \tfrac{1}{d}(a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2 + \cdots + a_i\vartheta_i) \text{ für gewisse } a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } a_i \neq 0\}$$

ein Element x_i mit minimalem Betrag des Koeffizienten a_i. Zeige, dass $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ ist.

Aufgabe 5. *Wir suchen eine Ganzheitsbasis*

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $K := \mathbb{Q}[\alpha]$. Finde eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Hinweis. Verwende etwa das Verfahren aus Aufgabe 4. Zur Kontrolle: Die Diskriminante von $(1, \alpha, \alpha^2)$ ist $-2^2 \cdot 107$. Wenn du überprüfen möchtest, ob ein Element aus K ganz ist, dann berechne zunächst seine Spur und dann seine Norm; sind diese nicht ganzzahlig, so kann das Element nicht ganz sein. Im schlimmsten Fall musst du folgende Charakterisierung verwenden (in dieser Aufgabe kommt man aber darum herum): Ein Element u aus K ist genau dann ganz, wenn das charakteristische Polynom der linearen Abbildung $K \to K,\ x \mapsto ux$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

♡ **Aufgabe 6.** *Der mystische Körper mit einem Element*

Das *q-Analogon* einer Zahl n ist $[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

a) Zeige: Ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_q$ besitzt genau $(q^n - 1)/(q - 1)$ eindimensionale Untervektorräume.

b) Finde eine Formel für die Anzahl k-dimensionaler Untervektorräume eines n-dimensionalen Vektorraums über $\mathbb{F}_q$. Drücke dein Ergebnis über q-Analoga aus.

c) Setze ohne Erlaubnis in deiner Formel aus b) $q := 1$. Was passiert? Was sollten also Vektorräume und Untervektorräume über dem Körper $\mathbb{F}_1$ mit einem Element sein?