Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 6 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Klassenzahlberechnungen*

a) Zeige, dass die quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ für $d \in \{-7, -3, -2, -1, 2, 3, 5\}$ die Klassenzahl 1 besitzen.

b) Zeige, dass auch $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ die Klassenzahl 1 besitzt.

c) Was ist die Klassenzahl von $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Aufgabe 2. *Eine Schranke für die Diskriminante*

a) Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Sei d_K die Diskriminante einer Ganzheitsbasis. Zeige:

$$|d_K| \geq \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

b) Zeige: Bis auf $\mathbb{Q}$ selbst gibt es keinen Zahlkörper mit $|d_K| = 1$.

Bemerkung. Wenn du möchtest, kannst du bei der Gelegenheit auch gleich zeigen, dass $|d_K| \to \infty$ für $n \to \infty$. Eine Verstärkung dieser Aussage ist das Hermite–Minkowski-Theorem, demnach es zu jeder Schranke nur endlich viele Zahlkörper mit Diskriminante unterhalb dieser Schranke gibt.

Aufgabe 3. *Wir mögen Hauptideale*

a) Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Sei $\mathfrak{a}^m = (\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ und eine Zahl $m \geq 0$. Sei $L := K(\sqrt[m]{\alpha})$. Zeige, dass das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ von $\mathcal{O}_L$ ein Hauptideal ist.

Hinweis. Nur um Missverständnissen vorzubeugen, das Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ besteht aus allen $\mathcal{O}_L$-Linearkombinationen von Elementen aus $\mathfrak{a}$.

b) Sei K ein Zahlkörper. Finde eine endliche Erweiterung L von K, sodass jedes Ideal von $\mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_L$ zu einem Hauptideal wird (im gleichen Sinn wie in a)).

Hinweis. Versuche, „die Klassengruppe zu töten“.