Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Dichtheit ganzzahliger Linearkombinationen*

Sei x eine irrationale reelle Zahl. Zeige: $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(1, x)$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. *Auf den Spuren Fermats*

Sei K ein Zahlkörper.

a) Sei $m \geq 0$ eine zur Klassenzahl h_K teilerfremde Zahl. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Zeige: Ist $\mathfrak{a}^m$ ein Hauptideal, so ist auch $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

b) Gelte in $\mathcal{O}_K$ die Identität $z^p = x_1 \cdots x_n$, wobei die x_i paarweise teilerfremd sind. Zeige: Ist $h_K = 1$, so sind die x_i bis auf Einheiten p-te Potenzen.
Hinweis. Die Behauptung gilt in allgemeinen faktoriellen Ringen.

c) Zeige dieselbe Behauptung wie in c) unter der schwächeren Voraussetzung $p \nmid h_K$.

d) Zeige: Um Fermats großen Satz zu beweisen, genügt es, ihn für primzahlige Exponenten und für den Exponent 4 zu beweisen.

Aufgabe 3. *Verzweigung von Primidealen*

Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Es ist $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$. Bestimme das Verzweigungsverhalten der Primzahlen $2, 3, 5$ und 11 in $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 4. *Mumfords Schatzkarte*

Die unten stehende Skizze visualisiert die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$. Was möchte sie dir mitteilen? Untersuche folgende Fragen:

a) Welche Primideale sind jeweils zu vertikalen Linien gruppiert? Wieso?

b) Was hat die mit „$[(X^2 + 1)]$" beschriftete Kurve mit dem Verzweigungsverhalten von Primzahlen in $\mathbb{Z}[i]$ zu tun?

c) Kannst du auf analoge Art und Weise die Primideale von $\mathcal{O}_K$ aus Aufgabe 3 visualisieren? Deine Skizze sollte aus zwei übereinander liegenden Kurven bestehen, wobei die untere Kurve einfach die gerade Linie der Primideale von $\mathbb{Z}$ sein sollte. Die obere Kurve sollte „aus drei Strängen bestehen".