Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

# Übungsblatt 8 zur Algebraischen Zahlentheorie

**Aufgabe 1.** *Verzweigung ist die Ausnahme*

Sei $K$ ein Zahlkörper vom Grad $n$. Gelte $K = \mathbb{Q}[\vartheta]$ mit $\vartheta \in \mathcal{O}_K$.

a) Zeige: Die Diskriminante $d_\vartheta$ der $\mathbb{Q}$-Basis $(1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1})$ von $K$ ist gleich der Diskriminante des Minimalpolynoms von $\vartheta$.

b) Sei $p$ eine Primzahl, sodass die Ideale $(p)$ und $\mathfrak{F}_\vartheta$ von $\mathcal{O}_K$ zueinander teilerfremd sind. Zeige, dass $p$ genau dann in $K$ verzweigt ist, wenn $p \mid d_\vartheta$.

c) Zeige: Nur endlich viele Primzahlen sind in $K$ verzweigt. Kannst du die Kandidaten für verzweigte Primzahlen sogar explizit angeben? Was ist die Konsequenz für die Visualisierung von Ganzheitsringen im Stile von Mumfords Schatzkarte?

d) Interpretiere Aufgabe 2 von Blatt 4 in neuem Licht.

**Aufgabe 2.** *Trägheit bei nichtzyklischer Galoisgruppe*

Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Sei $\mathrm{Gal}(L|K)$ nicht zyklisch.

a) Zeige, dass kein Primideal von $\mathcal{O}_K$ in $L$ träge ist.

*Tipp.* Verwende ohne Beweis, dass für Primideale $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ mit Verzweigungsindex 1 gilt, dass $G_\mathfrak{P} \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$.

b) Folgere, dass nur endlich viele Primideale von $\mathcal{O}_K$ in $L$ unzerlegt sind.

*Hinweis.* Ein Scholium von Aufgabe 1c) ist, dass nur endlich viele Primideale von $\mathcal{O}_K$ in $L$ verzweigt sind.

**Aufgabe 3.** *Vorfreude aufs quadratische Reziprozitätsgesetz, Gauß' aureum theorema*

a) Ist $10$ modulo $p := 65537$ ein quadratischer Rest?

*Hinweis.* Verwende ohne Beweis, dass $\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)$ (das ist nicht krass) und $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ (das ist krass).

b) Bestimme die Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $1/65537$.

♡ **Aufgabe 4.** *Lücken zwischen Primzahlen*

Zeige: Zu jeder Lauflänge $n \geq 1$ gibt es eine Folge von $n$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, welche alle keine Primzahlen sind.

♡ **Aufgabe 5.** *Verzweigte Überlagerungen in der komplexen Geometrie*

a) Informiere dich über verzweigte Überlagerungen (branched coverings) in der komplexen Geometrie und vergleiche die dortige Situation mit der fundamentalen Gleichung.

b) Frage Sven, was er dir zu diesem Thema auf jeden Fall mitgeben möchte.