Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Marco Hien
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 11 zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1. *Endlichkeit der Untergruppe der Einheitswurzeln*

a) Sei K ein Zahlkörper. Zeige, dass $\mu(K) = \{\zeta \in K \mid \zeta^k = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$ endlich ist.

Erinnerung. Es gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für teilerfremde Zahlen a und b und $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

b) Sei K ein Zahlkörper, der über eine Einbettung nach $\mathbb{R}$ verfügt. Zeige: $\mu(K) = \{\pm 1\}$.

c) Für welche Zahlkörper enthält der zugehörige Ganzheitsring nur endlich viele Einheiten? Was ist eine obere Schranke dafür, wie viele Einheiten diese Ringe höchstens enthalten?

Aufgabe 2. *Die Schlacht an der Bucht der Drachen*

a) Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{13}]$. Bestimme eine fundamentale Einheit von $\mathcal{O}_K$, also ein Einheit ε, sodass jede Einheit von $\mathcal{O}_K$ von der Form $\pm\varepsilon^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist.

Tipp. Du weißt, wie $\mathcal{O}_K$ aussieht. Zeichne das Gitter $(\ell \circ j)[\mathcal{O}_K^\times]$ in $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und finde einen Punkt, der dem Ursprung am nächsten ist. Das ist eine fundamentale Einheit.

b) Als sich Daenerys' Armee der Unbefleckten im üblichen militärischen Stil formiert hatte, sahen ihre Gegner 13 gleich große quadratische Einheiten. Zusammen mit Daenerys selbst hätten sie aber auch ein einzelnes großes Quadrat bilden können. Wie viele Krieger umfasste die Armee und wie alt ist der Busfahrer?

Tipp. Für den ersten Teil Aufgabe a).

Aufgabe 3. *Ein allgemeines Beispiel zur Einheitenbestimmung*

a) Sei K ein Zahlkörper mit r reellen und s Paaren komplexer Einbettungen. Zeige, dass das Vorzeichen der Diskriminante von K gleich $(-1)^s$ ist.

b) Sei K ein Zahlkörper vom Grad 3 mit negativer Diskriminante. Zeige, dass es eine fundamentale Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ gibt und dass $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ ist.

Tipp. Weise zunächst nach, dass K über genau eine reelle und genau ein Pärchen komplexer Einbettungen verfügt. Damit ausgestattet liefert dir der Dirichletsche Einheitensatz eine fundamentale Einheit ε. Weise nun nach, dass $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}] = 3$. Damit folgt $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

Aufgabe 4. *Einheiten von rein reellen Zahlkörpern*

Sei K ein rein reeller Zahlkörper (d. h. dass das Bild einer jeden Körpereinbettung $K \to \mathbb{C}$ schon in $\mathbb{R}$ liegt). Sei X eine echte nichtleere Teilmenge von $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{R})$. Zeige, dass es eine Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ mit $0 < \sigma(\varepsilon) < 1$ für alle $\sigma \in X$ und $\sigma(\varepsilon) > 1$ für alle $\sigma \notin X$ gibt.

Hinweis. Verwende *nicht* den Gitterpunktsatz von Minkowski. Verwende nur, dass das Einheitengitter ein vollständiges Gitter der Spur-Null-Hyperebene ist. Vergiss am Ende nicht, zu quadrieren!