Beweistechniken

Bis man zum eigentlichen Kern eines mathematischen Problems vordringt, muss man im Allgemeinen mehrere Definitionen entfalten. Das gelingt meist mit der Technik des direkten Beweisens.

Beispiel: Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wir wollen zeigen:

$$f \text{ injektiv} \wedge g \text{ injektiv} \implies g \circ f \text{ injektiv}.$$

Mit den unten beschriebenen Vorlagen lautet ein sehr ausführlicher Beweis wie folgt:

> Gelte, dass f und g injektiv sind. Um dann die Injektivität von $g\circ f$ zu zeigen, seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig und gelte $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Nach Definition der Abbildungsverkettung gilt also
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})).$$
>
> Da g injektiv ist, folgt daraus
>
> $$f(x) = f(\tilde{x}).$$
>
> Da auch f injektiv ist, folgt daraus wiederum
>
> $$x = \tilde{x}.$$
>
> Das war zu zeigen.

Der Kern der Argumentation liegt in den Folgerungen zwischen den drei abgesetzten Gleichungen, der Vorbau ist aber trotzdem wichtig; insbesondere ist es wichtig, die Variablen x und $\tilde{x}$ richtig einzuführen. Setzt man Vertrautheit des Lesers mit den Voraussetzungen der Angabenstellung voraus, kann man den Beweis etwas kürzer auch so formulieren:

> Seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Dann folgt:
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \overset{g \text{ inj.}}{\implies} f(x) = f(\tilde{x}) \overset{f \text{ inj.}}{\implies} x = \tilde{x},$$
>
> das war zu zeigen.

Direkter Beweis

- Um $A \wedge B$ direkt zu zeigen, muss man sowohl A als auch B zeigen.

  Vorlage: Da ..., gilt A. Da außerdem ..., gilt auch B.

- Um $A \vee B$ direkt zu zeigen, muss man zeigen, dass A oder B (oder beide – das sagt man selten dazu) gelten. Meistens muss man dazu eine Fallunterscheidung führen.

  Vorlage: Wegen ... können nur folgende Fälle eintreten:
  Fall 1: Wegen ... gilt dann A.
  Fall 2: Wegen ... gilt dann B.

- Um $\neg A$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass die Annahme, dass A doch stimmt, zu einem Widerspruch führt.

  Vorlage: Angenommen, es gilt doch A. Dann ..., das kann nicht sein.

- Um $A \Rightarrow B$ direkt zu zeigen, setzt man die Gültigkeit von A voraus und zeigt dann B. Ob A tatsächlich stimmt, ist für die Argumentation nicht relevant, es geht nur um die hypothetische Schlussfolgerung.

  Vorlage: Gelte A. Dann ..., daher gilt B.

- Um $A \Leftrightarrow B$ direkt zu zeigen, zeigt man $A \Rightarrow B$ (die sog. Hinrichtung) und $B \Rightarrow A$ (die sog. Rückrichtung). Ob dabei A und B tatsächlich stimmen, ist nicht relevant.

  Vorlage: „$\Rightarrow$“: Gelte A. Dann ..., daher gilt B.
  „$\Leftarrow$“: Gelte B. Dann ..., daher gilt A.

  Manchmal sind die Beweise der beiden Richtungen so ähnlich, dass man sie zu einem zusammenfassen kann:

  Vorlage: A gilt genau dann, wenn ...; das ist genau dann der Fall, wenn ...; ...; das ist genau dann der Fall, wenn B gilt.

  Oder kürzer notiert:

  Vorlage: $A \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B$

- Um $\forall x \in X\colon A(x)$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass für jedes $x \in X$ jeweils die Aussage $A(x)$ gilt.

  Vorlage: Sei $x \in X$ beliebig. Da ..., gilt $A(x)$.

  Der bei den Auslassungspunkten auszuführende Beweis darf dabei von x nur voraussetzen, dass es ein Element der Menge X ist: Der Beweis muss mit jedem $x \in X$ zurechtkommen.

- Um $\exists x \in X\colon A(x)$ direkt zu zeigen, gibt man explizit ein $x \in X$ an, für das $A(x)$ gilt.

  Vorlage: Setze $x := \ldots$. Dann liegt x in der Tat in X, denn ...; und wegen ... gilt $A(x)$.

– Um $X \subseteq Y$ direkt zu zeigen, wobei X und Y Mengen sind, zeigt man, dass jedes Element von X auch in Y liegt.

  Vorlage: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $x \in Y$.

– Um $X = Y$ direkt zu zeigen, zeigt man $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

  Vorlage: „$\subseteq$": Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $x \in Y$.
  „$\supseteq$": Sei $y \in Y$ beliebig. Dann ..., daher gilt $y \in X$.

  Manchmal kann man die beiden Teilbeweise auch zu einem kombinieren.

– Um $f = g$ direkt zu zeigen, wobei f und g Abbildungen sind, zeigt man drei Teilaussagen:

  1. Die Definitionsmenge von f ist gleich der Definitionsmenge von g.
  2. Die Zielmenge von f ist gleich der Zielmenge von g.
  3. Für alle x der gemeinsamen Definitionsmenge gilt: $f(x) = g(x)$.

  Oft sind dabei die ersten beiden Teilaussagen trivialerweise erfüllt.

Beweis durch Widerspruch

Um eine Aussage A zu zeigen, kann man auch zeigen, dass die Annahme von $\neg A$ zu einem Widerspruch führt.

Vorlage: Angenommen, A wäre falsch. Dann ..., das kann nicht sein.

Beweis durch Kontraposition

Um eine Implikation der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen, d. h. unter der Voraussetzung von $\neg B$ einen Beweis von $\neg A$ führen. Das ist häufig dann hilfreich, wenn A und B selbst negierte Aussagen sind.

Beispiel: Wenn man sich direkt an einem Beweis der Implikation

$$k \text{ ist undorig} \implies k \text{ ist unfoberant}$$

versucht, wird man durch die vielen Verneinungen vielleicht verwirrt. Möglicherweise ist es daher einfacher, die Kontraposition

$$k \text{ ist foberant} \implies k \text{ ist dorig}$$

zu zeigen.