Blatt 1, Aufgabe 4(a)

Sei X eine Menge, die mindestens ein Element x_0 enthält. Sei Y eine Menge. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

Behauptung. *Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung existiert also eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Da die Identitätsabbildung id_X stets injektiv ist (wieso?), ist also $g \circ f$ injektiv. Nach Aufgabe 3(b) folgt daher, dass auch f injektiv ist.

„$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung ist f injektiv. Dann definieren wir eine Abbildung $g\colon Y \to X$ wie folgt:

$$\begin{aligned} g\colon\ Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \begin{cases} x, & \text{falls } y = f(x) \text{ für ein } x \in X, \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist g tatsächlich eine Abbildung, denn jedem $y \in Y$ wird genau ein Element der Zielmenge zugeordnet: Falls für y der zweite Fall eintritt, ist x_0 der eindeutige Funktionswert. Falls aber der erste Fall eintritt, kann man berechtigterweise Sorgen haben, ob es nicht verschiedene $x, \tilde{x}$ geben könnte, die beide $y = f(x) = f(\tilde{x})$ erfüllen. Aber da f injektiv ist, kann das nicht passieren.

Ferner gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, denn linke und rechte Seite sind Abbildungen von X nach X, und für alle $x \in X$ gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = \mathrm{id}_X(x). \tag{1}$$

Dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen nach unserer Definition von g. $\square$

Bemerkung. Die Fallunterscheidung in der Definition verwundert vielleicht. Der Funktionsterm im ersten Fall ist durch die Forderung $g \circ f = \mathrm{id}_X$ vorgeschrieben, denn sonst kann man nicht die Rechnung (1) führen. Der Funktionsterm im zweiten Fall ist prinzipiell beliebig, er dient nur dazu, um sicherzustellen, dass g tatsächlich auf allen Elementen von Y definiert ist (sonst ist g keine Abbildung). An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, dass X nicht leer ist.

Verständnisfragen: Wieso kann man für g nicht einfach die Umkehrfunktion von f nehmen? Wie sieht die in der Hinrichtung definierte Abbildung g in einem konkreten Beispiel für X, Y und f aus? Welche Besonderheit erfährt die Definition von g, wenn f sogar surjektiv ist?

Blatt 1, Aufgabe 4(b)

Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

Behauptung. *Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung existiert also eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Da die Identitätsabbildung id_Y stets surjektiv ist (wieso?), ist also $f \circ g$ surjektiv. Nach Aufgabe 3(d) folgt daher, dass auch f surjektiv ist.

„$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung ist f surjektiv. Daher ist es möglich, zu jedem $y \in Y$ ein für den Rest des Beweises festes $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$ zu wählen. Damit können wir eine Abbildung $g\colon Y \to X$ wie folgt definieren:

$$g\colon \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & x_y. \end{array}$$

Es ist g tatsächlich eine Abbildung, denn jedem $y \in Y$ wird genau ein Element der Zielmenge zugeordnet, nämlich x_y. Ferner gilt $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, denn linke und rechte Seite sind Abbildungen von Y nach Y, und für alle $y \in Y$ gilt

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_Y(y).$$

Dabei folgt das dritte Gleichheitszeichen nach unserer Wahl von x_y. $\square$

Bemerkung. Die Beweise der Hinrichtungen bei den Teilaufgaben (a) und (b) sind sehr ähnlich, aber die der Rückrichtungen unterscheiden sich in einem Detail deutlich: In Teilaufgabe (a) mussten wir zur Definition von g kein bestimmtes x *wählen*, da es wegen der Injektivität sowieso nur ein geeignetes x gab. In Teilaufgabe (b) dagegen gab es keine solche Eindeutigkeit; daher mussten wir *vor* der Definition von g ein für alle Mal entsprechende x'e wählen. Hätten wir einfach

$$g\colon \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & \text{irgendein } x \in X \text{ mit } f(x) = y \end{array}$$

geschrieben, wäre g keine Abbildung geworden, da dieses g manchen y vielleicht mehrere x'e zuordnet.

Blatt 1, Aufgabe 4(c)

Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

Behauptung. *Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Folgt mit den Rückrichtungen aus Teilaufgaben (a) und (b).

„$\Rightarrow$“: Wir können nicht einfach die Hinrichtungen der Teilaufgaben (a) und (b) zitieren, da diese vielleicht zwei verschiedene Abbildungen g liefern, von denen die eine $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und die andere $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllt; gesucht ist aber eine einzige Abbildung g, die beide Bedingungen zugleich erfüllt.

Dazu definieren wir g per Hand wie folgt:

$$\begin{aligned} g\colon\ Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \text{irgendein } x \in X \text{ mit } f(x) = y. \end{aligned}$$

Mit dieser Definition ist g tatsächlich eine Abbildung: Denn da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y tatsächlich ein $x \in X$ mit $f(x) = y$; und da f außerdem injektiv ist, gibt es auch nur ein solches x.

Es gilt dann $g \circ f = \mathrm{id}_X$, denn beide Seiten sind Abbildungen von X nach X und für alle $x \in X$ gilt (wieso?)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = \mathrm{id}_X(x);$$

außerdem gilt $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, denn beide Seiten sind Abbildungen von Y nach Y und für alle $y \in Y$ gilt (wieso?)

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y = \mathrm{id}_Y(y).$$ □