Blatt 2, Aufgabe 8

Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und sei für $x \in \mathbb{K}$ der *Betrag* von x als

$$|x| := \max\{x, -x\} \in \mathbb{K}$$

definiert (das Maximum existiert nach Aufgabe 7(b) tatsächlich).

Teilaufgabe (a)

Behauptung. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $0 \preceq |x|$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann können wir, da $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper ist, folgende Fallunterscheidung treffen:

Erster Fall: $x \succeq 0$. Dann gilt $-x \preceq 0 \preceq x$ (wieso?) und daher $-x \preceq x$ (wieso?). Somit ist $|x| = \max\{x, -x\} = x$ (wieso?) und daher folgt $|x| \succeq 0$.

Zweiter Fall: $x \preceq 0$. Dann gilt $x \preceq 0 \preceq -x$ (wieso?) und daher $x \preceq -x$ (wieso?). Somit ist $|x| = \max\{x, -x\} = -x$ (wieso?) und daher folgt $|x| \succeq 0$. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt also, dass der Betrag folgende aus der Schule bekannte Gleichung erfüllt:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{für } x \succeq 0, \\ -x, & \text{für } x \preceq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Behauptung. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt: $|x| = 0 \iff x = 0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Nach Definition des Maximums liegt $|x| = 0$ in der Menge $\{x, -x\}$. Also ist $x = 0$ oder $-x = 0$. In beiden Fällen folgt $x = 0$.

„$\Leftarrow$“: Es gilt $|x| = \max\{x, -x\} = \max\{0, 0\} = \max\{0\} = 0$ (weshalb gilt die letzte Gleichheit?). □

Teilaufgabe (b)

Behauptung. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $|xy| = |x|\,|y|$.*

Beweis. Wir unterscheiden vier Fälle und nutzen die Vereinfachungsregel (1):

Vorzeichen von x	Vorzeichen von y	linke Seite	rechte Seite
$x \succeq 0$	$y \succeq 0$	xy	xy
$x \succeq 0$	$y \preceq 0$	$-(xy)$	$x\,(-y)$
$x \preceq 0$	$y \succeq 0$	$-(xy)$	$(-x)\,y$
$x \preceq 0$	$y \preceq 0$	xy	$(-x)\,(-y)$

Die linke Seite ist also in jedem Fall gleich der rechten Seite der zu zeigenden Gleichung. (Wieso ist die Fallunterscheidung zulässig, wieso also kann es nicht noch andere Fälle geben? Wieso stimmen die angegebenen Ergebnisse für linke und rechte Seite?) □

Behauptung. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $|-x| = |x|$.*

Erster Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$|-x| = \max\{-x, -(-x)\} = \max\{-x, x\} = \max\{x, -x\} = |x|.$$ □

Zweiter Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$|-x| = |(-1)\,x| = |-1|\,|x| = 1 \cdot |x| = |x|.$$

(Wieso gilt $|-1| = 1$?) □

Teilaufgabe (c)

Behauptung. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $|x + y| \preceq |x| + |y|$ (die sog. Dreiecksungleichung).*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= \max\{x, -x\} + \max\{y, -y\} \\ &= \max\{x + y, x - y, -x + y, -x - y\} \\ &\succeq \max\{x + y, -(x + y)\} \\ &= |x + y|. \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt nach Definition, das zweite nach Aufgabe 7(c)(ii), das Relationszeichen nach 7(c)(i) und das letzte Gleichheitszeichen schließlich wieder nach Definition. □

Behauptung. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\big||x| - |y|\big| \preceq |x - y|$ (die sog. umgekehrte Dreiecksungleichung).*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{K}$ beliebig. Nach Definition ist dann $\big||x| - |y|\big|$ ein Element der Menge $\{|x| - |y|, |y| - |x|\}$. Wir müssen also zeigen, dass diese beiden Elemente jeweils kleiner oder gleich $|x - y|$ sind. Dazu folgende Rechnungen:

$$\begin{aligned} |x| - |y| &= |y + (x - y)| - |y| \preceq |y| + |x - y| - |y| = |x - y| \\ |y| - |x| &= |x + (y - x)| - |x| \preceq |x| + |y - x| - |x| = |y - x| = |x - y| \end{aligned}$$

Dabei wurde bei der Abschätzung jeweils die Dreiecksungleichung verwendet. □

Behauptung. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\big||x| - |y|\big| \preceq |x + y|$.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{K}$ beliebig. Unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt dann

$$\big||x| - |y|\big| = \big||x| - |-y|\big| \preceq |x - (-y)| = |x + y|.$$ □