Blatt 3, Aufgabe 11

Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper.

Definition. Ein *dedekindscher Schnitt* (A, B) *in* $\mathbb{K}$ ist ein Paar zweier nichtleerer Teilmengen A, B von $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = A \cup B$ und $a \preceq b$ für alle $a \in A, b \in B$.

Behauptung. *Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:*

(1) $\mathbb{K}$ *ist ordnungsvollständig.*

(2) Zu jedem dedekindschen Schnitt (A, B) *in* $\mathbb{K}$ *gibt es ein* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $A \preceq x$ *und* $x \preceq B$.

Beweis.

- Wir zeigen zunächst die Richtung (1) $\Rightarrow$ (2), sei also $\mathbb{K}$ ordnungsvollständig. Sei dann ein beliebiger dedekindscher Schnitt (A, B) in $\mathbb{K}$ gegeben. Wir setzen $x := \sup A$. Dieses Supremum existiert, da A nach Voraussetzung nicht leer ist und nach oben beschränkt ist: Da $B \neq \emptyset$, gibt es ein $b_0 \in B$, und dieses erfüllt $A \preceq b_0$ (wieso?).

  Dann ist klar, dass $A \preceq x$ gilt (wieso?). Auch gilt $x \preceq B$: Denn sei $b \in B$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung $A \preceq b$, d. h. $a \leq b$ für alle $a \in A$. Dann muss diese Abschätzung auch noch fürs Supremum gelten, d. h. es folgt $x \leq b$.

  Damit ist dieser erste Beweisteil abgeschlossen.

- Bevor wir einen Beweis der Rückrichtung führen, wollen wir kurz zeigen, dass eine andere Wahl von x nicht zum Erfolg geführt hätte. Sei also zu einem dedekindschen Schnitt (A, B) ein beliebiges $x \in \mathbb{K}$ mit $A \preceq x, x \preceq B$ gegeben, wir wollen zeigen, dass x Supremum von A ist.

  Es ist x also eine obere Schranke von A. Da $\mathbb{K} = A \cup B$, können wir folgende Fallunterscheidung treffen:

  - Erster Fall: $x \in A$. Dann ist x also sogar Maximum von A und damit ganz sicher Supremum von A.
  - Zweiter Fall: $x \in B$. In diesem Fall rechnen wir direkt nach, dass die Definition des Supremums für x erfüllt ist. Sei also $\varepsilon \succ 0$ beliebig. Dann liegt $x - \varepsilon/2$ nicht in B, denn wegen der Schnittvoraussetzung wäre sonst $x \preceq x - \varepsilon/2$, und das kann nicht sein.

    Folglich liegt $x - \varepsilon/2 =: a$ in A (wieso?) und es gilt $x - \varepsilon \prec a$, das war zu zeigen.

  In beiden Fällen ist also x Supremum von A.

- Sei für den Beweis der Richtung (2) $\Rightarrow$ (1) eine beliebige nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge $V \subset \mathbb{K}$ gegeben. Um die Voraussetzung zu verwenden, müssen wir einen dedekindschen Schnitt konstruieren; dazu setzen wir $B := \{u \in \mathbb{K} \mid V \prec u\}$ und $A := \mathbb{K} \setminus B$.

  Dann ist (A, B) tatsächlich ein dedekindscher Schnitt, denn:

- Es gilt $B \neq \emptyset$, denn da V nach oben beschränkt ist, gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{K}$ mit $V \preceq c$ – und diese liegt damit auch in B.
- Es gilt $A \neq \emptyset$, da $V \subset A$ (wieso?) und $V \neq \emptyset$.
- Es gilt $a \preceq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$, denn wegen $a \notin B$ gibt es ein $v \in V$ mit $a \preceq v$ – also folgt $a \preceq v \preceq b$ (wieso?).

Nach Voraussetzung gibt es somit ein $x \in \mathbb{K}$ mit $A \preceq x, x \preceq B$, und wir haben gesehen, dass x Supremum von A sein muss.

Dieses x ist nun auch Supremum von V. Denn x ist eine obere Schranke von V (da $V \subset A$ und $A \preceq x$) und die Supremumsdefinition ist erfüllt: Sei $\varepsilon \succ 0$ beliebig. Da x Supremum von A ist, gibt es ein $a \in A$ mit $x - \varepsilon \prec a$. Wegen $a \notin B$ existiert daher ein $v \in V$ mit $a \preceq v$; insgesamt folgt $x - \varepsilon \prec a \preceq v$. Das war zu zeigen. $\square$