Blatt 3, Aufgabe 12, Teilaufgabe (b)

Sei die Notation wie in der Angabe. Folgende Behauptung stand noch aus:

Behauptung. *Es gilt*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon |I_n| < \varepsilon,$$

wobei mit $|I_n|$ *die Länge des Intervalls* $I_n = [x_n, y_n]$ *gemeint ist.*

Beweis. Eine solche Behauptung beweist man gerne in zwei Schritten: Zunächst schätzt man die Länge $|I_n|$ geeignet nach oben ab, dann erst kümmert man sich darum, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes n zu finden. Der zweite Schritt wird uns später dank verschiedener Grenzwertsätze leichter fallen, jetzt müssen wir den Beweis noch relativ explizit führen. Der erste Schritt wird gleich schwer bleiben.

1. Für alle $n \geq 0$ gilt:

   $$|I_{n+1}| = y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot |I_n|.$$

   (Wieso stimmt der zweite Schritt?)

   Induktiv folgt daher (wieso?)

   $$|I_m| \leq \frac{1}{2^m} \cdot |I_0|$$

   für alle $m \geq 0$.

2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $n := \lceil \log_2(2|I_0|/\varepsilon) \rceil$, damit ist die Aufrundung des Zweierlogarithmus von $2|I_0|/\varepsilon$ gemeint. Dann gilt

   $$|I_n| \leq \frac{1}{2^n} \cdot |I_0| \leq \frac{1}{2^{\log_2(2|I_0|/\varepsilon)}} \cdot |I_0| = \frac{1}{2|I_0|/\varepsilon} \cdot |I_0| = \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

   das war zu zeigen. (Wieso stimmen die beiden Abschätzungen?) □

Bemerkung. Die korrekte Wahl von n sieht man nicht im Vorhinein. Vielmehr lässt man auf seinem Schmierzettel an dieser Stelle zunächst Platz und rechnet ohne konkreten Wert von n erstmal weiter; am Ende der Abschätzungskette sieht man dann, wie man n wählen muss, damit wirklich „$< \varepsilon$" gilt.