Blatt 6, Aufgabe 27 (einer von drei Fällen)

Zur Erinnerung: Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt genau dann *nach oben beschränkt*, wenn

$$\exists C \in \mathbb{R}\colon \forall n \geq 0\colon a_n \leq C.$$

Behauptung. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_n$ eine beliebige reelle Folge. Dann gibt es drei Fälle (die sich nicht alle gegenseitig ausschließen, aber das ist nicht schlimm – wieso?):

1. $(a_n)_n$ ist nach oben unbeschränkt.
2. $(a_n)_n$ ist nach unten unbeschränkt.
3. $(a_n)_n$ ist beschränkt (nach oben und unten).

Wir wollen im Folgenden die Behauptung für den ersten Fall zeigen. Dazu definieren wir rekursiv eine Folge $(i_k)_k$ von Indizes, sodass die Teilfolge $(a_{i_k})_k$ (schwach) monoton steigt:

- Als ersten Index wählen wir $i_0 := 0$. Das erste Glied unserer Teilfolge ist also einfach das erste Glied der ursprünglichen Folge $(a_n)_n$.
- Wenn wir i_k schon konstruiert haben, definieren wir i_{k+1} wie folgt: Unter den Zahlen

  $$a_{i_k+1}, a_{i_k+2}, a_{i_k+3}, \ldots$$

  muss es mindestens eine Zahl a_j mit $a_j > a_{i_k}$ geben. Denn sonst wäre die Folge $(a_n)_n$ beschränkt (wieso?). Wir wählen dieses j als i_{k+1}, setzen also $i_{k+1} := j$. Dieser neue Index ist größer als i_k, wie es sich für die Indizes einer Teilfolge auch gehört; und nach Konstruktion gilt $a_{i_{k+1}} > a_{i_k}$. □