Blatt 13, Aufgabe 36

Behauptung. *Sei (V, Q) ein nichtdegenerierter quadratischer Modul und $U \subseteq V$ ein isotroper Unterraum mit Basis $u_1, \ldots, u_m$. Dann existiert ein isotroper Unterraum $U' \subseteq V$ mit Basis $u'_1, \ldots, u'_m$, sodass $B(u_i, u'_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$ gilt. Ferner ist die Summe $U + U'$ direkt und als quadratischer Modul isomorph zur m-fachen direkten Summe der hyperbolischen Ebene.*

Beweis. Ergänze die gegebene Basis von U zu einer Basis von ganz V. Dann hat die Darstellungsmatrix der zu Q gehörigen symmetrischen Bilinearform B die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix},$$

da U isotrop ist. Die Sterne stehen für zunächst nicht weiter bekannte Einträge; wir wissen nicht einmal, wie breit und hoch die Gesamtmatrix ist.

Durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen (wie beim Verfahren zur Bestimmung der Sylvesterform) können wir erreichen, dass der erste Stern der ersten Zeile nicht null ist. Denn wären alle Sterne der ersten Zeile null, hätte die Matrix im Widerspruch zur Nichtdegeneriertheit nicht vollen Rang.

Ferner können wir erreichen, dass dieser erster Stern sogar eine Eins ist: Das übliche Problem, dass wir wegen der gezwungenen simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen „mehr als gewollt“ dividieren, tritt nicht auf, da sich dieser Stern nicht auf der Hauptdiagonale befindet.

Mit dieser Eins nun können wir durch weitere Umformungen alle Einträge rechts und unter der Eins auf null bringen.

Auf diese Art und Weise können wir noch $(m-1)$ Mal fortfahren. Das Endergebnis ist dann (nicht ausgefüllte Zellen sind null)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 & & & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & & 1 & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & 0 & & & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & & & 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Bei diesen Operationen wurden die ersten m Basisvektoren nicht verändert (und stimmen daher immer noch mit $u_1, \dots, u_m$ überein). Wir wählen die folgenden m Basisvektoren als $u'_1, \dots, u'_m$. Dann sieht man aus der Matrix, dass in der Tat $B(u_i, u'_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, m$ gilt.

Außerdem ist klar, dass die Summe $U+U'$ direkt ist (wieso?). Wenn wir die Basisvektoren neu anordnen, als

$$u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_m, u'_m, \text{dann die restlichen,}$$

sieht der obere linke $(2m \times 2m)$-Teil der Darstellungsmatrix so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $U \oplus U'$ die m-fache direkte Summe von Hyperebenen. $\square$