Blatt 14, Aufgabe 37

Sei f eine nichtdegenerierte quadratische Form in n Variablen über $k = \mathbb{Q}_p$, die nicht 0 repräsentiert. Sei M die Menge

$$M := \{x \in k^*/k^{*2} \mid f \text{ repräsentiert } x\}.$$

Behauptung. *Für die Anzahl der Elemente von M gilt:*

1. *Wenn $n = 1$: $|M| = 1$.*
2. *Wenn $n = 2$: $|M| = 2^{r-1}$.*
3. *Wenn $n = 3$: $|M| = 2^r - 1$.*
4. *Wenn $n = 4$: $|M| = 2^r$.*

Dabei bezeichne r die Dimension des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums k^*/k^{*2}, d. h. es gilt $|k^*/k^{*2}| = 2^r$.

Beweis.

1. Das Korollar in Abschnitt IV.2.2 zeigt $M = \{d\}$, wobei d die Diskriminante von f bezeichnet. Also $|M| = 1$.
2. Das Korollar zeigt $M = H^\varepsilon_{-d}$ (Notation vom ersten Lemma im genannten Abschnitt). Dabei ist $d \neq -1 \in k^*/k^{*2}$, da f nach Voraussetzung nicht 0 repräsentiert (das folgt über Theorem 6). Also sagt das Lemma, dass diese Menge 2^{r-1} Elemente enthält.
3. Das Korollar zeigt in Verbindung mit dem Lemma, dass $M = (k^*/k^{*2}) \setminus \{-d\}$. Also gilt $|M| = |k^*/k^{*2}| - 1 = 2^r - 1$.
4. Das Korollar zeigt $M = k^*/k^{*2}$, also $|M| = |k^*/k^{*2}| = 2^r$. □