Blatt 14, Aufgabe 41a)

Behauptung. *Jede natürliche Zahl ist eine Summe von vier Quadraten.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Um zu sehen, ob wir das Theorem von Gauß anwenden können, schreiben wir n als

$$n = 4^a(8b + r)$$

für gewisse $a, b \geq 0$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ – wir klammern also maximal oft den Faktor 4 aus und teilen der komplementären Faktor mit Rest durch 8.

Wenn nun r nicht 7 ist, ist das Theorem von Gauß anwendbar. Also lässt sich n als Summe dreier Quadrate schreiben. Da die Null auch eine Quadratzahl ist, können wir n trivialerweise auch als Summe von vier Quadraten schreiben.

Wenn r doch 7 ist, betrachten wir die Zahl

$$n' := n - 4^a = 4^a(8b + 6).$$

Nach dem Theorem von Gauß lässt sich diese als Summe dreier Quadrate schreiben:

$$n' = x^2 + y^2 + z^2$$

für gewisse $x, y, z \geq 0$. Damit sehen wir, dass wir n als Summe von vier Quadraten schreiben können:

$$n = n' + 4^a = x^2 + y^2 + z^2 + (2^a)^2.$$

□

Blatt 14, Aufgabe 41b)

Behauptung. *Jede natürliche Zahl ist eine Summe aus drei Dreieckszahlen.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir folgen dem Hinweis und betrachten die Zahl $8n+3$. Auf diese ist sicherlich das Theorem von Gauß anwendbar, es gibt also $x, y, z \geq 0$ mit

$$8n + 3 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Um mehr Information über x, y und z zu erhalten, reduzieren wir diese Gleichung modulo 8 – der Ring $\mathbb{Z}/(8)$ lässt sich nämlich wegen seiner geringen Anzahl an Elementen gut überblicken:

$$3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \mod 8.$$

Die Menge der Quadrate von $\mathbb{Z}/(8)$ ist

$$\{0^2, 1^2, \ldots, 7^2\} = \{0, 1, 4\},$$

und man kann durch explizite Rechnung bestätigen: Die einzige Möglichkeit, drei Quadratzahlen in $\mathbb{Z}/(8)$ so aufzusummieren, dass die Summe $3 \in \mathbb{Z}/(8)$ ist, ist die, dass man dreimal die Quadratzahl 1 summiert. Es sind also x^2, y^2 und z^2 jeweils 1 modulo 8.

Insbesondere sind x, y und z ungerade, also von der Form

$$x = 2x' + 1 \qquad y = 2y' + 1 \qquad z = 2z' + 1$$

für gewisse $x', y', z' \geq 0$. Nun kann man algebraisch nachrechnen, dass die Summe der drei Dreieckszahlen

$$\frac{x'(x'+1)}{2} + \frac{y'(y'+1)}{2} + \frac{z'(z'+1)}{2}$$

gerade n ergibt. Das zeigt die Behauptung. □

Frage: Gibt es auch einen Beweis, der (zumindest in Teilen) geometrisch ist?