Blatt 3, Aufgabe 9

Seien Zahlen $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ und eine gleichmäßig differenzierbare Funktion F in $k+2$ Variablen, definiert auf einer Umgebung um $(\bar{u}_k, \bar{u}_{k-1}, \ldots, \bar{u}_1, \bar{u}_0, 0)$, gegeben.

Es gelte, dass $F(\bar{u}_k, \bar{u}_{k-1}, \ldots, \bar{u}_1, \bar{u}_0, 0) = 0$ ist und dass eine gleichmäßig differenzierbare Funktion g existiert, die die Eigenschaft

$$F(u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1, u_0, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_k = g(u_{k-1}, \ldots, u_1, u_0, t) \tag{1}$$

für alle $(u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1, u_0, t)$ aus einer bestimmten Umgebung um $(\bar{u}_k, \bar{u}_{k-1}, \ldots, \bar{u}_1, \bar{u}_0, 0)$ erfüllt.

Bemerkung. Die Existenz einer solchen Funktion g wird durch den Satz von der impliziten Funktion garantiert, wenn man voraussetzt, dass die Ableitung von $F(u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1, u_0, t)$ nach u_k an der Stelle $(\bar{u}_k, \bar{u}_{k-1}, \ldots, \bar{u}_1, \bar{u}_0, 0)$ nicht null ist.

Behauptung. *Es gibt ein $\delta > 0$, sodass es genau eine auf $[-\delta, \delta]$ definierte k-mal gleichmäßig differenzierbare Funktion x gibt, die für alle Zeiten die Gleichung*

$$F(x^{(k)}(t), x^{(k-1)}(t), \ldots, x^{(1)}(t), x^{(0)}(t), t) = 0 \tag{2}$$

erfüllt. Dabei bezeichne $x^{(i)}$ die i-te Ableitung von x.

Beweis. Dazu betrachten wir folgendes Hilfssystem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} s \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ g(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0, s) \end{pmatrix} \tag{3}$$

und führen zwei Mengen A und B ein: Die Menge A sei die Menge all derjenigen Funktionen x, die

- k-mal gleichmäßig differenzierbar sind,
- die Zeit 0 in ihrem Definitionsbereich enthalten,
- die Gleichung (2) zu allen Zeiten ihren Definitionsbereichs erfüllen,
- den Anfangswertbedingungen $x^i(0) = \bar{u}_i$ für alle $i = 0, \ldots, k$ genügen und
- für die die Punkte $(x^{(k)}(t), x^{(k-1)}(t), \ldots, x^{(1)}(t), x^{(0)}(t), t)$ für alle t ihres Definitionsbereichs in der Umgebung liegen, in der die Beziehung (1) gilt.

Die Menge B sei die Menge all derjenigen vektorwertigen Funktionen y, die

- einmal gleichmäßig differenzierbar sind,
- die Zeit 0 in ihrem Definitionsbereich enthalten,
- die Differentialgleichung (3) für alle Zeiten ihres Definitionsbereichs erfüllen und

– der Anfangswertbedingung $y(0) = (0, \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{k-1})$ genügen.

Nach dem Satz aus der Vorlesung gibt es Zahl $\delta > 0$, sodass in der Menge B genau eine Funktion liegt, die auf $[-\delta, \delta]$ definiert ist. Wir zeigen nun, dass die Funktionen aus A in 1:1-Korrespondenz mit den Funktionen aus B stehen – damit folgt dann die Behauptung. Dazu definieren wir eine Bijektion

$$\psi\colon A \longrightarrow B$$

wie folgt:

Zu einer Funktion $x \in A$ setzen wir $\psi(x) := (t \mapsto (t, x^{(0)}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)))$. Wir können uns schnell davon überzeugen, dass $\psi(x)$ tatsächlich in B liegt. Dass ψ bijektiv ist, sehen wir am besten, wenn wir die Umkehrfunktion angeben: Zu einer Funktion $y \in B$ setzen wir $\phi(y) := (t \mapsto y_0\text{-Komponente von } y(t))$. Wieder folgt schnell, dass $\phi(y)$ wirklich in A liegt.

Trivialerweise gilt dann $\phi(\psi(x)) = x$ für alle $x \in A$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage aus der Vorlesung gilt auch $\psi(\phi(y)) = y$ für alle $y \in B$. $\square$