Wir wollen die Bemerkung der Vorlesung (beginnend mit „Sei $\Gamma \subseteq V$ ein Unterraum der Dimension $n-k$“) vom 21.6.2010 genauer verstehen.

Die Situation ist folgende: Wir haben einen festen Unterraum $\Gamma \subseteq V$ eines $n$-dimensionalen Vektorraums $V$ gegeben. Der Unterraum $\Gamma$ habe die Dimension $n-k$.

Ziel ist es, eine Charakterisierung für zu $\Gamma$ komplementäre Unterräume herzuleiten, d.h. für solche $k$-dimensionalen Unterräume $\Lambda \subseteq V$, für die gilt: $\Gamma \oplus \Lambda = V$.

Dazu betrachten wir zunächst den festen Unterraum $\Gamma$ genauer; als erstes wählen wir eine Basis $(b_1, \ldots, b_{n-k})$ von $\Gamma$. Den Unterraum $\Gamma$ können wir auch als Element $[\omega]$ mit $\omega := b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-k} \in \Lambda^{n-k}V$ in der Graßmannschen $G(n-k, V)$ auffassen.

Nun ergänzen wir die Basis $(b_1, \ldots, b_{n-k})$ von $\Gamma$ zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von ganz $V$. Der Dualraum $V^\star$ ist dann mit der Dualbasis $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ ausgestattet.

Wir haben nun einen Isomorphismus $\Lambda^{n-k}V \cong \Lambda^k V^\star$:

Als Volumenform wählen wir $\mathrm{vol} = \vartheta_1 \wedge \cdots \wedge \vartheta_n \in \Lambda^n V^\star$, dann ist der Isomorphismus wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rrcl} K\colon & \Lambda^{n-k}V & \to & \Lambda^k V^\star \\ & x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-k} & \mapsto & i_{x_{n-k}} \cdots i_{x_1}(\mathrm{vol}), \end{array}$$

wobei zu einem Vektor $x \in V$ die lineare Abbildung $i_x$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{rrcl} i_x\colon & \Lambda^\star V^? & \to & \Lambda^{?-1}V^\star \\ & \alpha_1 \wedge \cdots \alpha_? & \mapsto & \sum_{i=1}^{?}(-1)^{i-1}\alpha_i(x)\alpha_1 \wedge \cdots \widehat{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \alpha_? \end{array}$$

Für das Fragezeichen kann man dabei all die natürlichen Zahlen einsetzen, die echt größer als null sind. Der Hut auf „$\alpha_i$“ bedeutet, dass das $\alpha_i$ in dem Dachprodukt nicht vorkommen soll.

Dieser Isomorphismus ist nun sicherlich ein wenig abstrakt definiert. Um ihn besser zu verstehen, lohnt es sich, folgendes Beispiel der Vorlesung nachzuvollziehen:

$$K(b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-k}) = \vartheta_{n-k+1} \wedge \cdots \wedge \vartheta_n$$

Vermöge dieses Isomorphismus können wir dem $(n-k)$-Vektor $\omega \in \Lambda^{n-k}V$, der den festen Unterraum $\Gamma$ beschreibt, einen Vektor $K(\omega) \in \Lambda^k V^\star$ zuordnen. (In der Vorlesung wurde dieser Vektor wieder mit „$\omega$“ bezeichnet, hier wollen wir diese Doppelbenennung aber nicht nutzen.)

Wir brauchen nun noch einen weiteren Isomorphismus, nämlich $\Lambda^k V^\star \cong (\Lambda^k V)^\star$. (In der Vorlesung wurde dieser Isomorphismus unterdrückt, wir werden ihn aber gleich an einer Stelle benötigen.)

Zur Notation: Schreibt man „$\Lambda^k V^\star$“ ohne Klammern, meint man $\Lambda^k(V^\star)$; Elemente von $\Lambda^k V^\star$ sind also Summen $k$-facher Dachprodukte von Vektoren aus $V^\star$. (Vektoren aus $V^\star$ nennt man übrigens auch „Linearformen auf $V$“.)

Mit der Schreibweise „$(\Lambda^k V)^\star$“ meint man dagegen den Dualraum von $\Lambda^k V$; Elemente von $(\Lambda^k V)^\star$ sind also lineare Abbildungen von $\Lambda^k V$ nach $K$.

Der Isomorphismus $\Lambda^k V^\star \cong (\Lambda^k V)^\star$ ist nun wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{rrcl} L\colon & \Lambda^k V^\star & \to & (\Lambda^k V)^\star \\ & \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k & \mapsto & (x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \mapsto \det(\alpha_i(x_j))_{i,j=1,\ldots,k}) \end{array}$$

Dabei ist mit „$(\alpha_i(x_j))_{i,j=1,\ldots,k}$“ die Matrix gemeint, deren $(i,j)$-ter Eintrag $\alpha_i(x_j)$ ist.

Die Umkehrabbildung dieses Isomorphismus $L$ werden wir im Folgenden nicht brauchen, nur der Vollständigkeit halber sei sie hier angegeben:

$$\begin{array}{rcl} L^{-1}\colon\ (\Lambda^k V)^\star & \to & \Lambda^k V^\star \\ \alpha & \mapsto & \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha(b_{i_1}\wedge\cdots\wedge b_{i_k})\vartheta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\vartheta_{i_k} \end{array}$$

Eben haben wir $\omega \in \Lambda^{n-k}V$ den $k$-Vektor $K(\omega) \in \Lambda^k V^\star$ zugeordnet; vermöge des Isomorphismus $L$ können wir diesem Vektor einen Vektor $\overline{\omega} := L(K(\omega)) \in (\Lambda^k V)^\star$ zuordnen. In der Vorlesung wurde dieser Vektor auch einfach wieder mit „$\omega$“ bezeichnet.

Nach diesen Vorarbeiten betrachtet die Vorlesung nun folgende Teilmenge $U$ von $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$:

$$U := \{[z] \in \mathbb{P}(\Lambda^k V) \mid \overline{\omega}(z) \neq 0\}$$

Da $\overline{\omega}$ eine lineare Abbildung ist und in den Körper $K$ abbildet, ist die Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ die Verschwindungsmenge von genau einem linearen homogenen Polynom.

Wir behaupten nun, dass $U \cong \mathbb{A}^{\binom{n}{k}-1}$:

Da der Vektorraum $\Lambda^k V$ die Dimension $\binom{n}{k}$ hat, hat $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ die Dimension $\binom{n}{k} - 1$.

Wenn man die Koordinaten von $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ geeignet wählt, könnte man die Bedingung $\overline{\omega}(z) \neq 0$ auch einfach als $z_0 \neq 0$ schreiben, wobei „$z_0$“ für die erste (vorderste) Koordinate von $z$ stehen soll.

In diesem Fall wäre dann $U$ gleich der standardoffenen Menge $U_0$, von der wir bereits wissen, dass sie isomorph zu $\mathbb{A}^{\binom{n}{k}-1}$ ist.

Weiter behaupten wir:

$$U \cap G(k,n) = \{\Lambda \subseteq V \mid \Lambda = \operatorname{span}[v_1,\ldots,v_k] \text{ ist } k\text{-dim. Unterraum mit } \overline{\omega}(v_1\wedge\cdots\wedge v_k) = \omega\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_k \neq 0\}$$

Um diese Behauptung einzusehen, muss nur noch gezeigt werden, dass $\overline{\omega}(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)\cdot(b_1\wedge\cdots\wedge b_n) = \omega\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ gilt. (Die Multiplikation mit dem Basiselement $b_1\wedge\cdots\wedge b_n$ ist nur aus Typgründen notwendig: Ohne diese Zusatzmultiplikation stünde links ein Element von $K$, rechts aber eins von $\Lambda^n V$.)

Dazu zeigen wir etwas allgemeiner folgende Behauptung:

$$\overline{\omega}(z) = \omega \wedge z, \text{ für alle } z \in \Lambda^k V.$$

Linke und rechte Seite sind linear in $z$, daher genügt es, die Gleichheit auf einer Basis von $\Lambda^k V$ nachzurechnen; als solche Basis nehmen wir $(b_{i_1}\wedge\cdots\wedge b_{i_k})_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$.

Wenn man sich nun mit Indizes konzentriert, sieht man in der Tat, dass linke und rechte Seite übereinstimmen, wenn man für $z$ diese Basisvektoren einsetzt.

Als letztes behaupten wir, dass für $\Lambda = \operatorname{span}[v_1,\ldots,v_k]$ die Aussage $\omega\wedge v_1\cdots\wedge v_k \neq 0$ äquivalent zur Aussage $\Gamma \oplus \Lambda = V$ ist.

Dazu erinnern wir uns daran, dass die Aussage $\omega\wedge v_1\cdots\wedge v_k = b_1\wedge\cdots\wedge b_{n-k}\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_k \neq 0$ äquivalent dazu ist, dass die Vektoren $b_1,\ldots,b_{n-k}, v_1\ldots,v_k$ linear unabhängig sind.

Damit folgt die Äquivalenz zur Aussage $\mathrm{span}[b_1, \dots, b_{n-k}] \oplus \mathrm{span}[v_1, \dots, v_k] = V$ dann schon nach lineare Algebra.

Damit haben wir schlussendlich folgende Charakterisierung gefunden:

Ein $k$-Dimensionaler Vektorraum $\Lambda = \mathrm{span}[v_1, \dots, v_k]$ ist genau dann komplementär zum festen Unterraum $\Gamma \subseteq V$, wenn gilt:

$$\omega \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0.$$

Dabei ist mit $\omega \in \Lambda^{n-k}V$ nach wie vor

$$\omega = b_1 \wedge \cdots \wedge b_{n-k}$$

gemeint, wobei $(b_1, \dots, b_{n-k})$ die gewählte Basis von $\Gamma$ bezeichnet.

(Die Gültigkeit dieser Äquivalenz hätten wir uns auch direkt überlegen können (dann hätten wir auch nicht die ganzen Isomorphismen benötigt), aber unser Ziel war es ja auch, die Gleichungskette der Vorlesung zu verstehen.)