Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 1 zur Algebra I

Abgabe bis 23. April 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. *Lösungskriterium*

Sei eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten der Form

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$$

gegeben. Zeige, dass jede ganzzahlige Lösung ein Teiler von a_0 sein muss.

Lösung. Sei x eine ganzzahlige Lösung der Gleichung. Dann ist $n \geq 1$ und es folgt

$$x \cdot (x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) = -a_0.$$

Da der Ausdruck in Klammern eine ganze Zahl ist (wieso?), ist daher x ein Teiler von a_0 (wieso?).

Bemerkung: Zusammen mit Aufgabe 3b) von Blatt 0 hat man damit ein nützliches Kriterium gefunden: Jede rationale Lösung einer solchen Polynomgleichung muss sogar schon ganzzahlig und ein Teiler von a_0 sein. Weitere irrationale Lösungen werden damit aber nicht ausgeschlossen.

Aufgabe 2. *Polynomgleichungen ungeraden Grads*

Zeige, dass jede normierte Polynomgleichung ungeraden Grads mit rationalen Koeffizienten eine Lösung in den reellen Zahlen besitzt.

Lösung. Sei f ein Polynom ungeraden Grads mit rationalen Koeffizienten. Dann konstruieren wir in drei Schritten eine Lösung der Gleichung $f(X) = 0$.

1. Zunächst finden wir zwei Schranken für die zu findende Lösung, genauer zwei Zahlen $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ mit $f(x_0) < 0 < f(y_0)$.

   Das beweist man entweder über eine Grenzwertüberlegung oder direkt über Abschätzungen: Sei $R := |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq R+1$ folgende Hilfsüberlegung (wieso?):

$$\begin{aligned} \left| a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right| &\overset{\triangle}{\leq} |a_{n-1}|\frac{1}{|x|} + \cdots + |a_1|\frac{1}{|x|^{n-1}} + |a_0|\frac{1}{|x|^n} \\ &\leq R \cdot \frac{1}{|x|} \leq \underbrace{\frac{R}{R+1}}_{=:q} < 1 \end{aligned}$$

   Somit gilt (wieso?) für alle $x \geq R+1$

$$f(x) = x^n \left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \geq x^n (1-q) > 0$$

und für alle $x \leq -R-1$

$$f(x) = x^n \left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_0\frac{1}{x^n}\right) \leq x^n\,(1-q) < 0.$$

Die Zahlen $x_0 := -R-1$ und $y_0 := R+1$ leisten also das Gewünschte.

2. Nun geben wir eine Konstruktion an, um sukzessive immer bessere Schranken

$$x_n, y_n \in \mathbb{Q} \text{ mit } x_n \leq y_n \text{ und } f(x_n) \leq 0 \leq f(y_n)$$

zu finden. Der erste Schritt wird durch obige Argumentation erledigt. Ist nun (x_n, y_n) schon konstruiert, schreiben wir $m := \frac{x_n+y_n}{2}$ und konstruieren die nächstbesseren Schranken (Skizze!):

$$\begin{cases} \text{Falls } f(m) < 0\text{:} & \text{Setze } x_{n+1} := m,\ y_{n+1} := y_n. \\ \text{Falls } f(m) = 0\text{:} & \text{Setze } x_{n+1} := m,\ y_{n+1} := m. \\ \text{Falls } f(m) > 0\text{:} & \text{Setze } x_{n+1} := x_n,\ y_{n+1} := m. \end{cases}$$

Diese Fallunterscheidung kann man tatsächlich (in der Praxis, intuitionistisch) durchführen, da $f(m)$ eine rationale Zahl ist (wieso?).

3. Die so konstruierten Schranken x_n und y_n legen nach dem Intervallschachtelungsprinzip eine bestimmte Zahl $z \in \mathbb{R}$ fest (wieso?):

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} z, \quad y_n \xrightarrow{n\to\infty} z.$$

Daher konvergieren auch die Folgen $(f(x_n))_n$ und $(f(y_n))_n$:

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(z), \quad f(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(z).$$

Denn f setzt sich ja nur aus Konstanten, Addition und Multiplikation zusammen, und dafür gibt es in der Analysis entsprechende Grenzwertregeln (etwas abstrakter: Die Polynomfunktion f ist stetig!).

Die Behauptung $f(z) = 0$ folgt nun wegen der Tatsache, dass schwache Ungleichungen im Grenzwert erhalten bleiben, aus folgender Beobachtung:

$$\begin{aligned} f(x_n) \leq 0 \text{ für alle } n \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z) \leq 0 \\ f(y_n) \geq 0 \text{ für alle } n \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z) \geq 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Wesentlichen wiederholt obige Argumentation einfach den Beweis des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen aus der Analysis. In seiner Allgemeinheit steht dieser uns nicht zur Verfügung, da wir die im zweiten Schritt benötigten Fallunterscheidungen bei beliebigen stetigen Funktionen intuitionistisch nicht treffen können.

Bemerkung: Wenn man den Fundamentalsatz der Algebra schon kennt, kann man kürzer so argumentieren: Echt komplexe Lösungen treten stets in komplex-konjugierten Paaren auf. Da die Gleichung $f(X) = 0$ aber insgesamt eine ungerade Anzahl von Lösungen hat, muss mindestens eine der Lösungen rein reell sein.

Aufgabe 3. *Beispiele für Polynomgleichungen*

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten...

a) vierten Grads, welche in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.

b) fünften Grads, welche als einzige komplexe Lösung die Zahl 1 besitzt.

c) die $\sqrt[7]{3+\sqrt[3]{4}}$ als eine Lösung besitzt.

d) die $\cos 15°$ als eine Lösung besitzt.

Lösung.

a) $X^4 + 1 = 0$ oder $(X^2+1)(X^2+1) = 0$ oder viele andere (wieso?).

b) $(X-1)^5 = 0$ (wieso?), d. h. $X^5 - 5\,X^4 + 10\,X^3 - 10\,X^2 + 5\,X - 1 = 0$.

Bemerkung: Die Gleichung $X^5 - 1 = 0$ hat als einzige reelle Lösung die Zahl 1, besitzt in den komplexen Zahlen aber noch vier weitere Lösungen, nämlich die vier restlichen fünften Einheitswurzeln.

c) Wir schreiben $x := \sqrt[7]{3+\sqrt[3]{4}}$ und formen diese Identität so lange um, bis keine Wurzeln mehr übrig bleiben: Konkret rechnen wir hoch sieben, minus drei, hoch drei und minus vier. Mit diesen Schritten sieht man, dass

$$(x^7 - 3)^3 - 4 = 0$$

folgt. Also ist $(X^7-3)^3 - 4 = 0$ die gesuchte Gleichung, ausmultipliziert $X^{21} - 9\,X^{14} + 27\,X^7 - 31 = 0$.

Bemerkung: Eine Probe ist nicht nötig, da man beim Herleiten der Gleichung „$\Rightarrow$"-Zeichen verwendet hat. In der Gleichung am Ende sollte die Polynomvariable groß geschrieben werden.

d) Nach einem Additionstheorem gilt

$$\cos 30° = 2\,(\cos 15°)^2 - 1.$$

Stellt man diese Beziehung unter Beachtung von $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ um, erkennt man $\cos 15°$ als Lösung der Gleichung

$$X^4 - X^2 + \frac{1}{16} = 0.$$

Bemerkung: Durch Verwendung eines anderen Additionstheorems kann man den Wert von $\cos 15°$ auch direkt bestimmen,

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \cos 30° = \cdots = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

und dann die Technik von Teilaufgabe c) verwenden.

Bemerkung: Eine abstraktere Argumentation ist folgende. Die Zahl $e^{\mathrm{i}\pi/12}$ ist algebraisch (da sie die Gleichung $X^{24} - 1 = 0$ erfüllt). Nach einem späteren Satz der Vorlesung muss daher auch ihr Realteil algebraisch sein. Dieser ist gerade $\cos 15°$. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv ist, kann man aus ihm sicher auch eine entsprechende Gleichung für $\cos 15°$ ablesen, allerdings wird diese recht großen Grad haben.

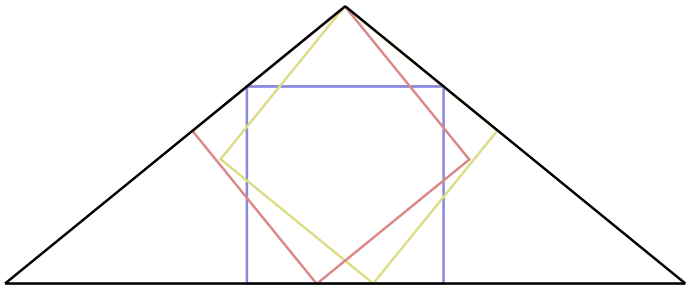
Aufgabe 4. *Calabis Dreieck*

Neben dem gleichseitigen Dreieck gibt es nur ein Dreieck, das folgende erstaunliche Eigenschaft hat: Das größte einbeschreibbare Quadrat lässt sich auf drei verschiedene Arten einbeschreiben. Dieses zweite Dreieck hat Eugenio Calabi (1923–, italienisch-amerikanischer Mathematiker) gefunden und ist gleichschenklig.

Zeige, dass das Längenverhältnis der längsten zu einer der kürzeren Seiten die Gleichung

$$2X^3 - 2X^2 - 3X + 2 = 0$$

erfüllt.



Lösung. Da es nur um das Verhältnis der Längen geht, können wir die Längen der beiden Katheten jeweils als 1 festlegen. Die Länge x der Hypotenuse ist dann gesucht. Außerdem ist es hilfreich, drei weitere Größen zu betrachten (Skizze!):

- die Länge h der Höhe des Dreiecks,
- die Seitenlänge s der Quadrate und
- den spitzen Winkel α (in der Skizze unten links).

Variante 1: Man kann folgende drei Gleichungen aufstellen:

$$\frac{s}{1-s} = \frac{h}{x/2} \tag{1}$$

$$\frac{s}{1-s} = \frac{s}{x/2 - s/2} \tag{2}$$

$$(x/2)^2 + h^2 = 1 \tag{3}$$

Gleichung (1) drückt den Tangens von α auf zwei verschiedene Arten und Weisen aus: über das „schiefe" Dreieck unten links und über das (nicht eingezeichnete) Teildreieck, dessen eine Seite die Höhe ist. Auch die zweite Gleichung drückt den Tangens aus, über das schiefe Dreieck und das, dessen eine Seite die linke Kante des blauen Quadrats ist. Gleichung (3) ist eine Instanz des Satzes von Pythagoras.

Dieses Gleichungssystem kann man dann sukzessive lösen. Etwa kann man zunächst die erste Gleichung nach s und die dritte nach h auflösen:

$$s = \frac{2h}{x+2h}$$

$$h = \sqrt{1 - x^2/4}$$

(Wieso weiß man, dass h die positive Lösung der quadratischen Gleichung sein muss?) Setzt man diese Darstellungen in Gleichung (2) ein, erhält man

$$2x^4 - 6x^3 + x^2 + 8x - 4 = 0;$$

das ist schon fast die gesuchte Gleichung. Mittels einer Polynomdivision kann man den Faktor $(x-2)$ ausklammern:

$$(2x^3 - 2x^2 - 3x + 2)(x-2) = 0.$$

Da dieser Faktor nicht null ist (sonst wäre das Dreieck entartet), kann man ihn kürzen.

Variante 2: Ein anderes zielführendes Gleichungssystem ist folgendes (nach Tim Baumann):

$$\begin{aligned} h &= s + \tan\alpha \cdot s/2 \\ h &= \cos\alpha \cdot s + \sin\alpha \cdot s \\ x/2 &= \cos\alpha \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kommt durch Betrachtung des kleinen Teildreiecks oben zustande, die zweite durch Betrachtung des Winkels α an einer zu Hypotenuse parallelen Hilfslinie durch die obere Spitze des „schiefen Dreiecks“ (wie genau?).

Setzt man die ersten beiden Gleichungen gleich und formt unter Beachtung von $0° < \alpha < 90°$ um, erhält man nach einigem Rechnen die Beziehung

$$y^4 + 3y^3 - \frac{1}{4}y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

für $y := \cos\alpha$. Da $y \neq 1$ (wieso?), kann man durch den Faktor $(y-1)$ dividieren und erhält

$$2(2y)^3 - 2(2y)^2 - 3(2y) + 2 = 0.$$

Mit der dritten Gleichung folgt die Behauptung.