

Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch

Sei z eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten, die z als Lösung hat.

Aufgabe 2. Auf den Spuren Bombellis

Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

Aufgabe 3. Rechenregeln für komplexe Zahlen

- Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind.
Zeige, dass z^{-1} ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.
- Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl z durch $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und dass der Imaginärteil durch $\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ gegeben ist.
- Sei z eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.
- Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit i geometrisch.

Aufgabe 4. Zahlen nahe bei Null

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b genau dann die Wurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ nahe bei Null ist, wenn sowohl $|a|$ als auch $|b|$ nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2 + b^2} < \delta &\implies |a|, |b| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}: |a|, |b| < \delta &\implies \sqrt{a^2 + b^2} < \epsilon\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Ein neuer Zahlbereich

- Zeige, dass die Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.
- Konstruiere einen minimalen Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$, welcher die reellen Zahlen und eine Lösung ω der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.
- Zeige, dass $\omega^3 = 1$ in $\mathbb{R}(\omega)$ gilt.
- Finde eine Lösung der Gleichung $X^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}(\omega)$.