Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 3 zur Algebra I

Abgabe bis 6. Mai 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Beispiele für algebraische Zahlen*

a) Ist die Zahl $\cos 10^\circ$ algebraisch?

b) Zeige, dass die Polynomgleichung $X^3 - 2X + 5 = 0$ genau eine reelle Lösung α besitzt.

c) Zeige, dass diese Lösung α invertierbar ist, und finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die α^{-1} als Lösung besitzt.

Aufgabe 2. *Produkt algebraischer Zahlen*

a) Seien x und y Zahlen mit $x^3 - x + 1 = 0$ und $y^2 - 2 = 0$. Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Zahl $x \cdot y$ als Lösung besitzt.

b) Der *Grad* einer algebraischen Zahl z ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die z als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier algebraischer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

Aufgabe 3. *Eigenschaften algebraischer Zahlen*

a) Zeige, dass das komplex Konjugierte einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.

b) Zeige, dass der Betrag einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.

c) Zeige, dass rationale ganz algebraische Zahlen schon ganzzahlig sind.

d) Sei f ein normiertes Polynom vom Grad mindestens 1 mit rationalen Koeffizienten und z eine transzendente Zahl. Zeige, dass dann auch $f(z)$ eine transzendente Zahl ist.

Aufgabe 4. *Spielen mit Einheitswurzeln*

a) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung $X^6 + 1 = 0$.

b) Finde eine Polynomgleichung, deren Lösungen genau die Ecken desjenigen regelmäßigen Siebenecks in der komplexen Zahlenebene sind, dessen Zentrum der Ursprung der Ebene ist und das deine Lieblingszahl als eine Ecke besitzt.

c) Zeige, dass die Gleichung $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0$ genau $n - 1$ Lösungen besitzt, und zwar alle n-ten Einheitswurzeln bis auf die 1.

d) Sei ζ eine n-te und ϑ eine m-te Einheitswurzel. Zeige, dass $\zeta \cdot \vartheta$ eine k-te Einheitswurzel ist, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

Aufgabe 5. *Primitive Einheitswurzeln*

Eine n-te Einheitswurzel ζ heißt genau dann *primitiv*, wenn *jede* n-te Einheitswurzel eine ganzzahlige Potenz von ζ ist. Sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Kläre ohne Verwendung von b): Welche der vierten Einheitswurzeln sind primitiv?

b) Zeige, dass es genau $\varphi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln gibt.