

## Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 22. Mai 2013, 12:00 Uhr

### Aufgabe 1. Elementarsymmetrische Funktionen

- a) Gib  $e_2(X, Y, Z, U, V)$ , also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten  $X, Y, Z, U$  und  $V$ , explizit an.
- b) Schreibe  $X^2 + Y^2 + Z^2$  als polynomiellen Ausdruck in den  $e_i(X, Y, Z)$ .
- c) Schreibe  $X_1^2 + \dots + X_n^2$  als polynomiellen Ausdruck in den  $e_i(X_1, \dots, X_n)$ .
- d) Zeige, dass  $e_k(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$ .

### Aufgabe 2. Der Vietasche Satz

- a) Sei  $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$  eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  seien. Drücke die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2$  und  $a_3$  explizit als Polynome in den  $x_i$  aus.
- b) Verwende den Vietaschen Satz für  $n = 2$  um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

### Aufgabe 3. Diskriminanten kubischer Gleichungen

- a) Finde eine normierte Polynomgleichung dritten Grades, welche 1 als zweifache Lösung, 2 als einfache Lösung und keine weiteren Lösungen besitzt. Was ist ihre Diskriminante?
- b) Sei  $X^3 + pX + q = 0$  eine allgemeine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskriminante durch  $-4p^3 - 27q^2$  gegeben ist.

### Aufgabe 4. Symmetrien eines Polynoms

Sei  $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$ . Wie viele vierstellige Permutationen  $\sigma$  mit  $\sigma \cdot f = f$  gibt es?

### Aufgabe 5. Formale Ableitung von Polynomen

- a) Seien  $g(X)$  und  $h(X)$  Polynome. Zeige:

$$(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X) h^{(j)}(X).$$

- b) Sei  $f(X)$  ein Polynom und  $n$  eine natürliche Zahl. Zeige:  $f^{(n+1)} = 0 \iff \deg f \leq n$ .
- c) Sei  $f(X)$  ein Polynom und  $a$  eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Entwicklung von  $f(X)$  nach  $X - a$  durch die *Taylorsche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$