Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 6 zur Algebra I

Abgabe bis 27. Mai 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Anwendungen der Diskriminante*

a) Sei $X^3 + pX + q = 0$ eine reduzierte kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten p und q. Zeige, dass die Gleichung drei *paarweise verschiedene* Lösungen (in den komplexen Zahlen) besitzt, wenn q ungerade ist.

b) Sei $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass sie mindestens eine nicht reelle Nullstelle besitzt, wenn ihre Diskriminante negativ ist.

Aufgabe 2. *Diskriminanten allgemeiner kubischer Gleichungen*

a) Berechne die Diskriminante der allgemeinen kubischen Gleichung $X^3+aX^2+bX+c = 0$.

b) Zeige, dass $X^3 - 5\,X^2 + 7\,X - 3 = 0$ höchstens zwei verschiedene Lösungen hat.

Aufgabe 3. *Transzendente Zahlen*

a) Sei (z_n) eine konvergente komplexe Zahlenfolge mit Grenzwert z und seien alle Folgenglieder z_n algebraisch. Ist dann auch z algebraisch?

b) Ist $\sqrt[3]{\pi}$ eine algebraische Zahl? Ist π^3 algebraisch?

c) Finde eine Folge paarweise verschiedener transzendenter Zahlen.

Aufgabe 4. *Triangulatur des Kreises*

Ist folgendes Problem lösbar? Gegeben ein Kreis. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt.

Aufgabe 5. *Die Resultante zweier Polynome*

a) Seien $f(X)$ und $g(Y)$ zwei normierte Polynome mit Nullstellen (mit Vielfachheiten) $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$. Zeige, dass der Ausdruck $R := \prod_{i,j}(x_i - y_j)$ ein Polynom in den Koeffizienten von $f(X)$ und den Koeffizienten von $g(Y)$ ist.

b) Seien $X^2 + aX + b = 0$ und $Y^2 + cY + d = 0$ zwei quadratische Gleichungen. Gib einen in a, b, c und d polynomiellen Ausdruck an, der genau dann verschwindet, wenn die beiden Gleichungen eine gemeinsame Lösung besitzen.

Nicht verpassen: **Gauß-Vorlesung** über Muster bei Primzahlen am 28. Mai ab 17:00 Uhr im Parktheater Göggingen, mehr Informationen auf `http://xrl.us/gauss2013`.