Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 9 zur Algebra I

Abgabe bis 17. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Linearkombinationen*

a) Sei x eine Lösung der Gleichung $X^4 - 3\,X^3 + 10\,X - 10 = 0$. Drücke x^6 als Linearkombination der Zahlen $1, x, x^2, x^3$ mit rationalen Koeffizienten aus.

b) Sei $z := \sqrt{5} + \sqrt[3]{5}$ gegeben. Gib eine natürliche Zahl n und eine verschwindende nichttriviale Linearkombination von $1, z, z^2, \ldots, z^n$ mit rationalen Koeffizienten an.

c) Finde zwei komplexe Zahlen, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und über $\mathbb{C}$ linear abhängig sind.

Aufgabe 2. *Grade algebraischer Zahlen*

a) Berechne den Grad von $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ über $\mathbb{Q}$, über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und über $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

b) Finde ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist, über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in genau zwei und über $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \mathrm{i})$ in genau vier irreduzible Polynome zerfällt.

c) Seien a und d ganze Zahlen. Zeige, dass $a + \sqrt{d}$ eine ganz algebraische Zahl ist und berechne ihren Grad in Abhängigkeit von a und d.

d) Sei ζ eine Lösung der Polynomgleichung $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0$. Zeige, dass ζ eine in $\alpha := \exp(\pi\mathrm{i}/5)$ rationale Zahl ist, und gib eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}(\zeta)$ an.

Aufgabe 3. *Spiel und Spaß mit der Gradformel*

a) Seien $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, $y \in \mathbb{Q}(x)$ und $z \in \mathbb{Q}(y)$. Wie lässt sich $\deg_{\mathbb{Q}(z)} x$ aus $\deg_{\mathbb{Q}(y)} x$ und $\deg_{\mathbb{Q}(z)} y$ berechnen?

b) Seien x, y, z wie in a). Zeige, dass $\deg_{\mathbb{Q}(z)} y$ ein Teiler von $\deg_{\mathbb{Q}(z)} x$ ist.

c) Sei f ein normiertes und irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 2 mit rationalen Koeffizienten. Sei a eine algebraische Zahl, deren Grad teilerfremd zum Grad von f ist. Zeige, dass keine Zahl aus $\mathbb{Q}(a)$ Nullstelle von f sein kann.

Aufgabe 4. *Primitive Elemente*

a) Finde ein primitives Element zu i und $\sqrt[3]{2}$.

b) Drücke $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ als Polynome in $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mit rationalen Koeffizienten aus.

c) Seien $z_1, \ldots, z_n$ algebraische Zahlen. Zeige, dass es eine algebraische Zahl z mit $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n)$ gibt.

d) Sei $f(X)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass eine algebraische Zahl a existiert, sodass $f(X)$ über $\mathbb{Q}(a)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 5. *Irrationale Zahlen für Fortgeschrittene*

Zeige mit elementaren Methoden direkt über den Ansatz $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$ mit rationalen Zahlen a und b, dass $\sqrt{2}$ kein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist, also keine in $\sqrt{3}$ rationale Zahl ist. Welchen Grad hat $\sqrt{2}$ daher über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?