Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 10 zur Algebra I

Abgabe bis 24. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Weitere Anwendungen der Gradformel*

a) Sei z eine algebraische Zahl und seien $x, y \in \mathbb{Q}(z)$. Zeige, dass

$$[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(x)] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(y)] \cdot [\mathbb{Q}(y) : \mathbb{Q}],$$

und gib ein Diagramm zur Veranschaulichung an.

b) Sei a eine algebraische Zahl und $y \in \mathbb{Q}(a)$. Sei f ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}(y)$, das über $\mathbb{Q}(y)$ auch irreduzibel ist. Sei der Grad von f mindestens 2 und teilerfremd zu $\deg_{\mathbb{Q}(y)} a$. Zeige, dass keine Zahl aus $\mathbb{Q}(a)$ Nullstelle von f sein kann.

c) Beweise oder widerlege: Sei z ein primitives Element zu algebraischen Zahlen x, y. Dann ist $\deg_{\mathbb{Q}} z$ ein Teiler von $\deg_{\mathbb{Q}} x \cdot \deg_{\mathbb{Q}} y$.

Aufgabe 2. *Galoissche Konjugierte*

a) Finde zwei algebraische Zahlen, die nicht zueinander galoissch konjugiert sind.

b) Wie viele galoissch Konjugierte hat die Zahl $\sqrt[4]{3}$?

c) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Finde alle galoissch Konjugierten von $\sqrt{p} + \sqrt{q}$.

d) Seien x, y, z algebraische Zahlen, sodass x zu y und y zu z galoissch konjugiert ist. Zeige, dass dann auch x galoissch konjugiert zu z ist.

e) Sei t eine algebraische Zahl. Zeige, dass die Summe von t mit all seinen galoisschen Konjugierten eine rationale Zahl ist. Wie steht es mit dem Produkt?

Aufgabe 3. *Eine konkrete Galoisgruppe*

Bestimme die Galoisgruppe der vier Nullstellen des Polynoms $X^4 + 1$.

Aufgabe 4. *Polynome sind blind für galoissch Konjugierte*

a) Zeige, dass zwei algebraische Zahlen t und t' genau dann zueinander konjugiert sind, wenn jedes Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches t als Nullstelle hat, auch t' als Nullstelle hat.

b) Seien t und t' zueinander konjugierte algebraische Zahlen und f ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass dann auch $x := f(t)$ und $x' := f(t')$ zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 5. *Gegenbeispiele*

Zeige an jeweils einem Beispiel, dass

a) Hilfssatz 4.3 auf Seite 118

b) Proposition 4.4 auf Seite 119

falsch werden, wenn man von den dort vorkommenden Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ nicht voraussetzt, dass sie die gesamten Lösungen (mit Vielfachheiten) einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten sind, sondern stattdessen beliebige algebraische Zahlen erlaubt.