

## Übungsblatt 11 zur Algebra I

Abgabe bis 1. Juli 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Wirkung der galoisschen Gruppe

Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen eines normierten separablen Polynoms  $f(X)$  mit rationalen Koeffizienten.

- Seien  $\sigma$  und  $\tau$  Symmetrien der Nullstellen. Zeige, dass  $\sigma \cdot (\tau \cdot x_i) = (\sigma \circ \tau) \cdot x_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
- Sei  $\sigma$  eine Symmetrie der Nullstellen und seien  $z, w \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ . Zeige:  $\sigma \cdot (z+w) = \sigma \cdot z + \sigma \cdot w$  und  $\sigma \cdot (zw) = (\sigma \cdot z) \cdot (\sigma \cdot w)$ .
- Zeige, dass genau dann eine Symmetrie  $\sigma$  der Nullstellen mit  $x_2 = \sigma \cdot x_1$  existiert, wenn  $x_1$  und  $x_2$  zueinander galoissch konjugiert sind.

### Aufgabe 2. Abstrakte Beispiele für Galoisgruppen

- Sei  $f(X)$  ein normiertes *separables* quadratisches Polynom mit rationalen Koeffizienten. Berechne die Galoisgruppe der Nullstellen von  $f(X)$  in Abhängigkeit der Diskriminante von  $f(X)$ .
- Sei  $f(X)$  ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 3 mit rationalen Koeffizienten und Nullstellen  $x_1, x_2, x_3$ . Sei  $x_1$  *kein* primitives Element zu  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$ . Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen genau sechs Elemente enthält.

### Aufgabe 3. Manchmal sind alle Symmetrien gerade

- Zeige, dass die Menge  $A_n$  der geraden Permutationen in  $n$  Ziffern eine Untergruppe der  $S_n$  ist.
- Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen eines normierten separablen Polynoms  $f(X)$  mit rationalen Koeffizienten genau dann vollständig in der alternierenden Gruppe  $A_n$  enthalten ist, wenn die Diskriminante von  $f(X)$  eine Quadratwurzel in den rationalen Zahlen besitzt.

### Aufgabe 4. Grad primitiver Elemente

Sei  $f(X)$  ein normiertes separables Polynom vom Grad  $n$  und  $t$  ein primitives Element seiner Nullstellen.

- Zeige, dass jedes weitere primitive Element  $t'$  denselben Grad wie  $t$  hat.
- Zeige, dass der Grad von  $t$  höchstens  $n!$  ist.
- Zeige, dass der Grad von  $t$  sogar ein Teiler von  $n!$  ist.

### Aufgabe 5. Galoissche Resolventen

- Wieso ist das Konzept der galoisschen Resolvente nur für separable Polynome definiert worden?
- Finde eine galoissche Resolvente für das Polynom  $f(X) = X^2 + X + 1$ .
- Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen eines normierten separablen Polynoms  $f(X)$  mit rationalen Koeffizienten. Sei  $C$  eine natürliche Zahl mit

$$n \cdot \left| \frac{x_i - x_j}{x_k - x_\ell} \right| \leq C$$

für alle  $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$  mit  $k \neq \ell$ . Zeige, dass

$$V(X_1, \dots, X_n) := X_1 + C X_2 + C^2 X_3 + \dots + C^{n-1} X_n$$

eine galoissche Resolvente für  $f(X)$  ist.