

Übungsblatt 1 zur Algebra II

Abgabe bis 22. Oktober 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (1+2+1) *Abstrakte Beispiele für Gruppenhomomorphismen*

- a) Sei G eine Gruppe und n eine ganze Zahl. Ist dann die Abbildung $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^n$ stets ein Gruppenhomomorphismus?
- b) Seien G und H Gruppen. Finde einen Gruppenisomorphismus $G \times H \rightarrow H \times G$.
- c) Seien x und y Elemente einer Gruppe G . Finde einen Gruppenisomorphismus $\phi : G \rightarrow G$ mit $\phi(xy) = yx$.

Aufgabe 2. (2+2) *Gruppen mit zwei Elementen*

- a) Seien G und H zweielementige Gruppen. Zeige, dass G und H auf genau eine Art und Weise isomorph sind.
- b) Zeige: $\text{Aut}(C_4) \cong C_2$.

Aufgabe 3. (4) *Nicht-isomorphe Gruppen gleicher Ordnung*

Zeige, dass es zwar eine Bijektion, nicht aber einen Gruppenisomorphismus zwischen C_4 und $C_2 \times C_2$ gibt.

Bemerkung. Mit dem Hauptsatz über endlich präsentierte abelsche Gruppen werden wir dieses Beispiel später konzeptioneller verstehen.

Aufgabe 4. (1+1+1+1) *Freies Produkt von Gruppen*

- a) Das Element $11'(-1)(-1)' \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist nicht offensichtlich gleich dem Einselement. Zeige, dass dieser erste Eindruck korrekt ist.
- b) Seien G und H Gruppen. Seien $g \in G$, $h \in H$ jeweils nicht das jeweilige Einselement. Zeige, dass die Elemente $1, gh, ghgh, ghghgh, \dots$ von $G * H$ paarweise verschieden sind.
- c) Seien G und H Gruppen, die beide ein vom Einselement verschiedenes Element besitzen. Zeige, dass $G * H$ nicht abelsch ist.
- d) Sei G eine Gruppe. Gib einen kanonischen Gruppenisomorphismus $G * 1 \rightarrow G$ an, wobei 1 die triviale Gruppe bezeichnet.
- e) *Für Teilnehmer des Pizzaseminars:* Zeige, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen ist.